La Cantuta
Fondo Editorial
Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle

$$T(x) = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

Transformación Lineal

Gamaniel Domingo Gonzales Salvador
Narcio Felimon Vilcapoma Lara
Vivian Collahua Rupaylla
José Enrique Tito Valenzuela

fondoeditorial.une.edu.pe

Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle (UNE)

Transformación Lineal

$$T(x) = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

Gamaniel Domingo Gonzales Salvador

Narcio Felimon Vilcapoma Lara

Vivian Collahua Rupaylla

José Enrique Tito Valenzuela

Lima - Perú

2023

Transformación Lineal

© **Gamaniel Domingo Gonzales Salvador**
gogaunmsm@gmail.com

Narcio Felimon Vilcapoma Lara
nvilcapoma@une.edu.pe

Vivian Collahua Rupaylla
vcollahua@une.edu.pe

José Enrique Tito Valenzuela
jtito@une.edu.pe

Editada por:

© Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle (UNE) - **Fondo Editorial "La Cantuta"**
Dirección: Enrique Guzman y Valle N° 951, Lurigancho -Chosica 15472, Perú
ISNI: 0000 0000 8534 4267
fondoeditorial@une.edu.pe
Teléf. móvil: +51 999 140 920
Portal Web: https://www.une.edu.pe/

Primera edición digital: Octubre 2023
Libro digital disponible en: https://fondoeditorial.une.edu.pe/

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú N° 2023-10233
ISBN: 978-612-4148-57-6
DOI: https://doi.org/10.54942/lacantuta.36

Corrección de estilo: Luis Pablo Diaz Tito
luisp.diaz@upsjb.edu.pe / Tel. de contacto: +51 955 129 801

Diseño y Diagramación: Gráfica "imagen"
Manuel Enrique Sampen Antonio
sampen25@gmail.com / Tel. de contacto: +51 990 064 589

Revisión por pares ciegos aprobado por el **Consejo Editorial del Fondo Editorial "La Cantuta".**

Libro resultado de Investigación y con revisión por pares doble ciego.

Sello editorial: Fondo Editorial (978-612-4148)

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, su tratamiento información, la transmisión de ninguna otra forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, por fotocopia, por registro u otros métodos, sin el permiso previo y por escrito de los titulares del copyright.

Tabla de contenido

Presentación

Los materiales de este libro han sido desarrollados para el curso introductorio de álgebra lineal, dirigido a estudiantes de pregrado tanto de la UNE como de otras carreras de la Universidad Nacional de Educación. En ellos se resume la experiencia de impartir el curso durante años de dictado en álgebra lineal. Nuestro propósito es dotar a los estudiantes de un texto en especial un capítulo del curso de álgebra lineal con los temas básicos de la teoría de las transformaciones lineales que, resalte los aspectos geométricos del tema, no oculte algunas demostraciones fundamentales que permiten reconocer las vinculaciones entre distintos conceptos y muestre algunas de sus aplicaciones. El libro incluye además listas de ejercicios que privilegian la aplicación de conceptos sobre los aspectos puramente algorítmicos. Esta nueva edición presenta la derivada como una transformación lineal.

Este capítulo es uno de los más importantes del curso de Álgebra Lineal, aquí estudiaremos transformaciones lineales, sus propiedades y su relación con las matrices.

Resumen

Las transformaciones lineales son funciones entre espacios vectoriales. Ellas preservan (mantienen) las estructuras lineales que caracterizan a esos espacios: los transformados de combinaciones lineales de vectores son las correspondientes combinaciones de los transformados de cada uno de los vectores. Las funciones que mantienen las estructuras características de los espacios entre los que actúan son de especial importancia porque permiten “moverse” entre ellos comparando las estructuras que los definen; en particular, permiten analizar cuán diferentes o semejantes son desde el punto de vista de esas propiedades (lineales, en el presente caso).

En este sentido las transformaciones lineales son tan importantes en el estudio de los espacios vectoriales, como las isometrías o movimientos lo son en la geometría.

Transformaciones Lineales

En el presente texto, abordaremos la transformación lineal entre dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo. Discutiremos las propiedades generales y los tipos especiales de transformaciones lineales. Se introducirá la estructura del núcleo y la imagen de una transformación lineal, y se analizará la relación entre sus dimensiones. Al fijar una base en cada espacio, se determinará la matriz asociada a una transformación lineal. Finalmente, se tratará sobre los espacios vectoriales de las transformaciones lineales y el espacio dual de un espacio vectorial.

1.1. Definición

Consideremos dos espacios vectoriales V y W sobre el cuerpo K, a la función $T: V \rightarrow W$, llamaremos una transformación lineal u homomorfismo si y sólo si cumple con las siguientes condiciones:

i) $T(x+y) = T(x)+T(y), \forall x, y \in V$

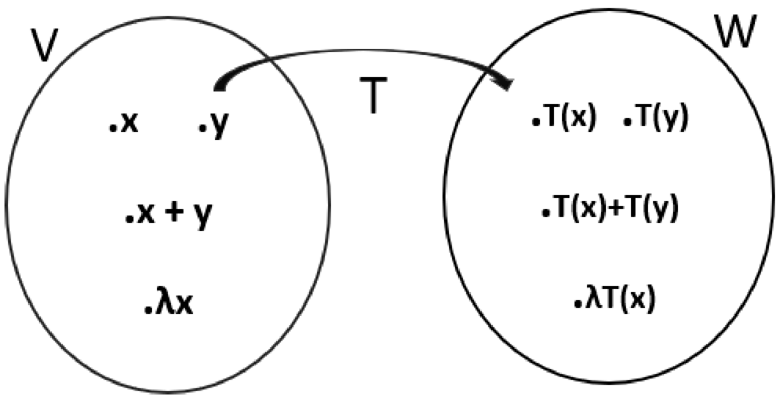
Es decir: Que la imagen de la suma de dos vectores de V es igual a la suma de sus imágenes en W.

ii) $T(\lambda x) = \lambda T(x), \forall\, x \in V, \lambda \in K.$

Es decir: Que la imagen del producto de cualquier escalar por todo vector de V es igual al producto del escalar por la imagen de dicho vector en W.

1.2. Interpretación Geométrica

Sea $T: V \rightarrow W$, una transformación lineal.



1.3. Teorema

Sea (V, + , K , .) y (W , + , K , .) dos espacios vectoriales, la función T: V → W es una transformación lineal sí y sólo sí. T(αx+ βy) = αT(×) + βT(y), ∀ α,β ϵ K y ∀ x,y ϵ V

Demostración

Suponiendo que T : V → W es una transformación lineal entonces (i), (ii) son válidos; como V es un espacio vectorial ⇒ αx,βy ϵ V, ∀ α,β ϵ K y ∀ x,y ϵ V.

Entonces αx + βy ϵ V ahora por la parte (i) se tiene: T(αx+ βy) = T(αx)+ T(βy)

Y por la parte (ii) se tiene:

T(αx+ βy) = T(αx)+ T(βy) = αT(×) + βT(y), ∀ x,y ϵ R, ∀ α,β ϵ K

T(αx+ βy) = αT(×) + βT(y)

Recíprocamente supongamos que:

T(αx+ βy) = αT(×) + βT(y), ∀ α,β ϵ K y ∀ x,y ϵ V

Entonces como α,β ϵ K ⇒ α = β = 1

i) Pues 1 ϵ K ⇒ $T(1.x) = T(x) + T(Y)$ *se verifica i)*

$Si\ a = \lambda, \quad b = 0, \lambda, 0$ ϵ K entonces T$(\lambda x + 0.y) = \lambda T(x) + 0.T(y) = \lambda T(x)$

∴ T$(\lambda x) = \lambda$ *se verifica* (ii),por lo tanto T es une transformación lineal.

Ejemplo. - Probar que I : V → W (transformación identidad) I(x) = x, ∀ x ϵ V es una transformación lineal.

Solución:

i) $I(\alpha x + \beta y) = \alpha x + \beta y = \alpha I(x) + \beta I(y)$

$$I(\alpha x + \beta y) = \alpha I(x) + \beta I(y), \forall x, y \in V, \alpha, \beta \in k$$

Por lo tanto, I es una transformación lineal.

Ejemplo. - Determinar si la aplicación $f: R^2 \rightarrow R^3$ definida por f(x,y)=(2x, - y,x) donde k = R es una transformación lineal.

<u>Solución</u>

i) $f[(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] = f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) por\ probar$

$f[(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$= (2(x_1 + x_2), -y_1 - y_2, x_1 + x_2)$

$= (2x_1, -y_1, x_1) + (2x_2 - y_2, x_2)$

$= f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2)$

ii) $f(\lambda(x, y)) = \lambda f(x, y)$ por probar

$f(\lambda(x, y)) = f(\lambda x, \lambda y) = (2\lambda x, -\lambda y, \lambda x) = \lambda(2x, -y, x) = \lambda f(x, y)$

por lo tanto $f: R^2 \rightarrow R^3$ es una transformación lineal.

Ejemplo. - Sea $T: R^3 \rightarrow R^3$ tal que T (x, y, z) = (x, 2, z)

¿T es una transformación lineal?

<u>Solución</u>

Sean $(x_1, y_1, z_1) \epsilon R^3$, $(x_2, y_2, z_2) \in R^3$ entonces

$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

$T[(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)] = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = (x_1 + x_2, 2, z_1 + z_2)$ …(1)

$T(x_1, y_1, z_1) + T(x_2, y_2, z_2) = (x_1, 2, z_1) + (x_2, 2, z_2) = (x_1 + x_2, 4, z_1 + z_2)$ …(2)

de (1) y (2) tenemos $T[(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)] \neq T(x_1, y_1, z_1) + T(x_2, y_2, z_2)$

Por lo tanto, T no es una transformación lineal.

Ejemplo. - Sean los subespacios R^n y R^m, $x \in R^n$ un vector y A una matriz de R^{m*n}, comprobar que la función $T: R^n \rightarrow R^m$ Definida por T(X) = Ax, A fijo, es una transformación lineal.

Solución

i) Probaremos que T(x+y) =T(x)+T(y), x,y $\in R^n$

T(x+y) = A(x+y) =Ax+Ay=T(x)+T(y)

∴ T(x+y)=T(x)+T(y)

i) Probaremos que T (λx)= λT(x), $\lambda \in R,\ X \in R^n$

T (λx) =A(λx,) = λ Ax = λT(x)

∴T(λx)= $\lambda T(x)$

Por lo tanto, de (i), (ii) T es una transformación lineal.

Ejemplo. - Sea el espacio vectorial V = {f/ f: R→ R continua} sobre el campo R, definimos:

T: V → V tal que T (f(x)) =$\int_0^x f(t)dt$

Probar que T es una transformación lineal.

Solución

i) $T\big(f(x) + g(x)\big) = T\big(f(x)\big) + T\big(g(x)\big)$, ∀ f,g ∈V por probar

$$T\big(f(x) + g(x)\big) = T\big((f + g)(x)\big) = \int_0^x (f + g)(t)dt$$

$=\int_0^x (f(t)+g(t))dt = \int_0^x f(t)dt + \int_0^x g(t)dt = T(f(x)) + T(g(x))$

$\therefore T(f(x)+g(x)) = T(f(x)) + T(g(x))$

ii) T $(\lambda f(x))$ =λT(f(x)), ∀ f ϵ V y λ ϵ R por probar

$T(\lambda f(x)) = T((\lambda f)(x)) = \int_0^x (\lambda f)(t)dt$

$= \int_0^x \lambda f(t)dt = \lambda \int_0^x f(t)dt = \lambda T(f(x))$

$\therefore T(\lambda f(x)) = \lambda T(f(x))$

Por lo tanto, de (i), (ii), T es una transformación lineal.

Ejemplo. - Consideremos V un espacio vectorial y $f: V \rightarrow$ R, g: $V \rightarrow$ R dos transformaciones lineales, sea F : V $\rightarrow$ R^2 una aplicación tal que F(v)=(f(v), g(v)),∀ v ϵV,demostrar que F es una transformación lineal.

<u>Solución</u>

i) $F(v+w) = F(v) + f$ (w), ∀ v, w ϵV por demostrar:

$F(v+w) = (f(v+w), g(v+w))$

$= (f(v)+f(w), g(v)+g(w))$por ser f y g transformación

$= (f(v), g(v)) + (f(w), g(w)) = F(v) + F(w)$

Por lo tanto, F (v + w) = F(v)+ F(w)

ii) F(λv) = λF(v), ∀ v ϵV, λ ϵ R por demostrar

F(λv) = (f(λv), g(λv) =(λf(v),λg(v)) por ser f y g transformación

= $\lambda(f(v), g(v)) = \lambda F$(v), por lo tanto, F($\lambda$v) = λF(v)

Luego de (i) y (ii) F es una transformación lineal.

Ejemplo. - Si $T: R^2 \rightarrow R^3$ es una transformación lineal tal que T (1,2) = (1,0,-1), T (2,1) = (2,1,-2) hallar T(x,y)

<u>Solución</u>

Expresaremos a (x,y) ϵ R^2 como conbinacion lineal de (1,2) y (2,1)

(x,y) = α (1,2)+β(2,1) …(1)

(x,y) = (α + 2β, 2α+ β), por igualdad se tiene:

$$\begin{cases} x = \alpha + 2\beta) \\ y = 2\alpha + \beta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{2y - x}{3} \\ \beta = \dfrac{2x - y}{3} \end{cases} \quad reemplazando\ en\ (1)$$

$$(x, y) = \frac{2y - x}{3}(1,2) + \frac{2x - y}{3}(2,1)$$

$$T(x, y) = T\left[\tfrac{2y-x}{3}(1,2) + \tfrac{2x-y}{3}(2,1)\right].T \quad \textit{transformación lineal}$$

$$= \frac{2y - x}{3}T(1,2) + \frac{2x - y}{3}T(2,1) = \frac{2y - x}{3}(1,0,-1) + \frac{2x - y}{3}(2,1,-2)$$

$$T(x, y) = \left(\frac{2y - x}{3}, 0, -\frac{2y - x}{3}\right) + (\frac{2}{3}(2x, -y), \frac{2x - y}{3}, -\frac{2}{3}(2x - y))$$

$$=\left(\tfrac{2y-x+4x-2y}{3}, 0 + \tfrac{2x-y}{3}, -\tfrac{2y-x}{3} - \tfrac{2}{3}(2x, -y)\right) = (x, \tfrac{2x-y}{3}, -x)$$

$$\therefore T(x, y) = \left(x, \tfrac{2x-y}{3}, -x\right)$$

Ejemplo. - Si F es una transformación lineal de R^3 en R^2 tal que F (0,-1,1) = (1,2), F(1,-1,0) = (3,4) y F(1,0,0) = (5,6).hallar F(x,y,z)

<u>Solución</u>

Escribiremos a (x, y, z) ϵR^3 en combinación lineal de (0,-1,1),(1,-1,0) y (1,0,0) es decir:

(x,y,z)=α(0,-1,1)+ β(1,-1,0)+ y(1,0,0) …(1)

(x,y,z) = (β+y,- α- β, α), por igualdad tenemos

$$\begin{cases} x = \beta + \lambda \\ y = -\alpha - \beta \\ z = \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = z \\ \beta = -(y+z) \; reemplazando\ en\ (1) \\ \lambda = x + y + z \end{cases}$$

(x,y,z) = z(0,-1,1)- (y+z)(1,-1,0)+(x+y+z)(1,0,0)

Como F es una transformación lineal, entonces

F(x,y,z) = F $[Z(0,-1,1)-)y+z)(1,-1,0)+(y+2z)(1,0,0)]$

= zF$(0,-1,1)-(y+z)F(1,-1,0)+(x+y+z)F(1,0,0)$

=z (1,2) -(y+z) (3,4) +(x+y+z) (5,6)

= (z-3y-3z+5x+5y+5z,2z- 4y - 4z+6x+6y+6z)

=(5x+2y+3z,6x+2y+4z)

$\therefore F(x,y,z) = (5x+2y+3z, 6x+2y+4z)$

Ejemplo. - Si $V = M_{2*2}$(R) conjunto de las matrices de orden dos y sea T: M_{2*2}(R)→R una aplicación tal que: T(A) = $a_{11} + a_{22}$

Donde A ϵ M_{2*2}*(R) ¿T es una transformación lineal?*

<u>Solución</u>

Sean A, B ϵ M_{2*2}*(R)* $\Rightarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$

i) T(A+B) = T(A)+T(B) por comprobar

T(A+B) = $T\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\right)$

$= T\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\right) = (a_{11} + b_{11}) + (a_{22} + b_{22})$

$= (a_{11} + a_{22})+(b_{11}+b_{22}) = T(A)+T(B)$

$\therefore T(A+B)=T(A)+T(B)$

ii) $T(\lambda A)= \lambda T(A), \forall A \in M_{2*2}(R)$ y $\lambda \in$ R por probar

$$T(\lambda A)= T\left(\lambda\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right)=T\begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{bmatrix}$$

$= \lambda a_{11} + \lambda a_{22} = \lambda(a_{11} + a_{22}) = \lambda T(A)$

$\therefore T(\lambda A) = \lambda T(A)$

Por lo tanto, de (i) y (ii) T es una transformación lineal.

1.4. Proposición

Sea (v, +, k,.), (w,+,k,.) dos espacios vectoriales y T: V $\rightarrow$ W una transformación lineal, se cumple las siguientes afirmaciones.

a) $T\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i T(v_i)$ **b)** $T(\theta_v)=\theta_w$

c) $T(-v)=-T(v)$

<u>Demostración</u>

a) La demostración se hace por inducción

i) Si n = 2, se cumple $T\left(\sum_{i=1}^{2}\alpha_i v_i\right)=T(\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2)$

$$=\alpha_1 T(v_1)+\alpha_2 T(v_2),\ v_1,v_2 \in V$$

$\alpha_1,\alpha_2 \in k$ pues T es transformación lineal.

ii) Supongamos que para n = h con h > 2 se cumple:

$$T\left(\sum_{i=1}^{h+1}\alpha_i v_i\right)=\sum_{i=1}^{h}\alpha_i T(v_i)$$

$$= T\left(\sum_{i=1}^{h}\alpha_i v_i\right) + T\left(\alpha_{h+1}v_{h+1}\right) \text{ pues T es transformación lineal.}$$

$$= T\left(\sum_{i=1}^{h}\alpha_i v_i\right) + \alpha_{h+1}T\left(v_{h+1}\right) \text{ de (ii) T transformación lineal.}$$

$$= \sum_{i=1}^{h+1}\alpha_i T\left(v_i\right), \text{ por lo tanto, se cumple para n = h + 1, } n = h+1,\ h \geq 2$$

Entonces se cumple $\forall\ n \geq 2$

b) $T\left(\theta_v\right) = T\left(\theta_v + \theta_v\right) = T\left(\theta_v\right) + T\left(\theta_v\right)$ T es transformación lineal.

$$T\left(\theta_v\right) - T\left(\theta_v\right) = T\left(\theta_v\right) + T\left(\theta_v\right) - T\left(\theta_v\right)$$

$$\theta_w = T\left(\theta_v\right) + \theta_w \Rightarrow T\left(\theta_v\right) = \theta_w$$

c) $T\left(-v+v\right) = T\left(-v\right) + T\left(v\right)$ por ser T transformación lineal.

$$T\left(\theta_v\right) = T\left(v\right) + T\left(-v\right) = \theta_w$$

$$T\left(-v\right) = -T\left(v\right) + \theta_w = -T\left(v\right)$$

$$\therefore\ T\left(-v\right) = -T\left(v\right)$$

1.5. Clasificación de las Transformaciones Lineales

Sea (V, +, K,.), (W, +, K,.) dos espacios vectoriales y f: V → W una transformación lineal es decir q se cumple (i) y (ii) en esta definición f no tiene ninguna condición salvo que solamente sea una función por lo tanto daremos los siguientes conceptos:

f es un morfismo $\Leftrightarrow$ f es inyectiva

f es un epimorfismo $\Leftrightarrow$ f es sobreyectiva

f es isomorfismo $\Leftrightarrow$ f es biyectiva

Si V = W, entonces la transformación lineal f se llama endomorfismo y si esta es biyectiva entonces recibe el nombre de automorfismo, es decir un automorfismo es toda transformación lineal biyectiva de un espacio vectorial en sí mismo.

Ejemplo. - Si $f: R^2 \rightarrow R^2$ es una aplicación definida por $f(x, y) = (x + y, x - y)$

¿f es un automorfismo?

Solución

Para que f sea un automorfismo debemos probar que f sea una transformación lineal biyectiva.

a) f es una transformación lineal.

i) $f((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2$

$= (x_1 + x_2 + y_1 + y_2, x_1 + x_2 - y_1 - y_2)$

$= (x_1 + y_{1,} x_1 - y_1) + (x_2 + y_2, x_2 - y_2)$

$= f(x_1, y_1) + (x_2, y_2)$

Por lo tanto, de (i)(ii) f es una transformación lineal.

b) f es inyectiva

sea $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in R^2$, tal que

$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) \Rightarrow (x_1 + y_{1,} x_1 - y_1) = (x_2 + y_2, x_2 - y_2)$

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = x_2 + Y_2 \\ x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = Y_2 \end{cases}$$

Luego $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) \Rightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$

Por lo tanto, f es inyectiva.

c) f es suryectiva

$\forall\ (x_2, y_2) \in R^2, \exists (x_1, y_1) \in R^2\ tal\ que\ \mathrm{f}(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$

$(x_1 + y_{1,} x_1 - y_1) = (x_2, y_2) por\ igualdada\ se\ tiene$:

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = x_2 \\ x_1 - y_1 = y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{x_2 + y_2}{2} \\ y_1 = \dfrac{x_2 - y_2}{2} \end{cases}$$

Luego de (a), (b)y (c) f es un automorfismo.

Ejemplo. - Sea $f: R^2 \to R^3$ una transformación lineal definida por $f(x, y) = (x + y, 0, x + y)$

¿f es monomorfismo, epimorfismo?

<u>Solución</u>

f es monomorfismo si f es inyectiva.

Si $x \neq y$ y se tiene $(x, y) \neq (y, x)$ sin embargo $f(x, y) = f(y, x)$

Por lo tanto, f no es inyectiva.

Por lo tanto, f no es un monomorfismo.

F es un epimorfismo si f es sobreyectiva.

$\forall (x, y, z) \in R^2$ tal que $f(a, b) = (x, y, z)$

Luego para $(3,1,2) \in R^3$ no existe $(x, y) \in R^2 / f(x, y) = (3,1,2)$

Por lo tanto, f no es sobreyectiva con lo cual f no es un epimorfismo.

Ejemplo. - La aplicación $f: R^3 \to R^3$ definida por $f(x, y, z) = (y, -x, z)$

¿f es un automorfismo en R^3?

<u>Solución</u>

Para que f sea automorfismo debe ponerse que f es una transformación lineal biyectiva.

a) f es una transformación lineal

$$
\begin{aligned}
i)\quad f\left(\left(x_1,y_1,z_1\right)+\left(x_2,y_2,z_2\right)\right) &= f\left(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2\right)\\
&=\left(y_1+y_2,-x_1-x_2,z_1+z_2\right)\\
&=\left(y_1,-x_1,z_1\right)+\left(y_2,-x_2,z_2\right)\\
&= f\left(x_1,y_1,z_1\right)+f\left(x_2,y_2,z_2\right)
\end{aligned}
$$

$$ii)\quad f\left(\lambda\left(x,y,z\right)\right)=f\left(\lambda x,\lambda y,\lambda z\right)=\left(\lambda y,-\lambda x,\lambda z\right)=\lambda\left(y,-x,z\right)=\lambda f\left(x,y,z\right)$$

Por lo tanto, de (i) y (ii), f es una transformación lineal.

b) f es inyectiva.

Sean $\left(x_1,y_1,z_1\right),\left(x_2,y_2,z_2\right)\in R^3$, tal que $f\left(x_1,y_1,z_1\right)=f\left(x_2,y_2,z_2\right)$

$$\left(y_1,-x_1,z_1\right),\left(y_2,-x_2,z_2\right)\Rightarrow x_1=x_2\wedge y_1=y_2\wedge z_1=z_2$$

Luego $f\left(x_1,y_1,z_1\right)=f\left(x_2,y_2,z_2\right)\Rightarrow\left(x_1,y_1,z_1\right)=\left(x_2,y_2,z_2\right)$

$\therefore$ f es inyectiva

c) f es sobreyectiva.

$\forall\left(x,y,z\right)\in R^3,\exists\left(a,b,c\right)\in R^3$ tal que $f\left(a,b,c\right)=\left(x,y,z\right)$

$$\left(b,-a,c\right)=\left(x,y,z\right)\Rightarrow b=x,\ a=-y,\ c=z$$

Luego $\forall\left(x,y,z\right)\in R^3,\exists\left(a,b,c\right)=\left(-y,x,z\right)$ tal que

$$f\left(a,b,c\right)=f\left(-y,x,z\right)=\left(x,y,z\right)$$

$\therefore$ f es sobreyectiva

Por lo tanto, de (a), (b) y (c) f es automorfismo.

1.6. Proposición

Sean V y W dos espacios vectoriales sobre k y $T:V\rightarrow W$ una transformación lineal, entonces se cumple las siguientes afirmaciones.

a) $T(V_1)=\{T(\alpha)\in W/\alpha\in V_1\}$ es un subespacio de W para cualquier subespacio V_1 de V.

b) Si W_1 es un subespacio de W entonces:

$T^{-1}(W_1)=\{\alpha\in V/T(\alpha)\in W_1\}$ es un subespacio de V.

c) T es inyectiva $\Leftrightarrow T(\alpha)=\theta_w\Rightarrow\alpha=\theta_v$

d) Si $\{v_1,v_2,...,v_r\}$ son linealmente independiente y T es inyectiva $\Rightarrow\{T(v_1),T(v_2),...,T(v_r)\}$ es linealmente independiente en W.

Demostración

a) i) Sea $\beta_1,\beta_1\in T(V_1)\Rightarrow\beta_1+\beta_2\in T(V_1)$ por probar

Si $\beta_1\in T(V_1)\Rightarrow\exists\alpha_1\in V_1/T(\alpha_1)=\beta_1$

$\beta_2\in T(V_1)\Rightarrow\exists\alpha_2\in V_1/T(\alpha_2)=\beta_2$ sumando

$T(\alpha_1)+T(\alpha_2)=\beta_1+\beta_2$

Como T es una transformación lineal entonces

$T(\alpha_1+\alpha_2)=T(\alpha_1)+T(\alpha_2)=\beta_1+\beta_2$, entonces

$T(\alpha_1+\alpha_2)=\beta_1+\beta_2$ y como $\alpha_1,\alpha_2\in V_1$ y V_1 es un subespacio de V.

Entonces $\alpha_1+\alpha_2\in V_1\Rightarrow\beta_1+\beta_2\in T(V_1)$

ii) Sea $\lambda\in k,\ \beta\in T(V_1)\Rightarrow\lambda\beta\in T(V_1)$ por probar

Si $\beta \in T(V_1) \Rightarrow \exists \alpha \in V_1$ tal que $T(\alpha)=\beta$ y como V_1 es subespacio de V

$\Rightarrow \lambda\alpha \in V_1 \Rightarrow T(\lambda\alpha)=\lambda T(\alpha)=\lambda\beta$

Como $T(\lambda\alpha)=\lambda\beta \Rightarrow \lambda\beta = T(V_1)$

$\therefore T(V_1)$ es un subespacio de W

b) **i)** $T^{-1}(W_1) \neq \phi$

$\theta' \in T^{-1}(W_1)$ cómo W_1 es un subespacio de W

$\Rightarrow \theta' \in W_1 \Rightarrow T(\theta)=\theta'$
$\Rightarrow \theta \in V \Rightarrow T^{-1}(W_1) \neq \phi$

ii) Sean $\alpha_1, \alpha_2 \in T^{-1}(W_1) \Rightarrow ¿\alpha_1+\alpha_2 \in T^{-1}(W_1)?$

Si $\alpha_1 \in T^{-1}(W_1) \Rightarrow \exists \beta_1 \in W_1$ tal que $T(\alpha_1)=\beta_1$

$\alpha_2 \in T^{-1}(W_1) \Rightarrow \exists \beta_2 \in W_1$ tal que $T(\alpha_2)=\beta_2$ sumando

$T(\alpha_1)+T(\alpha_2)=\beta_1+\beta_2$

Como T es una transformación lineal.

$T(\alpha_1+\alpha_2)=T(\alpha_1)+T(\alpha_2)=\beta_1+\beta_2$ y como W_1 es un subespacio

de W $\Rightarrow \beta_1+\beta_2 \in W_1 \Rightarrow \alpha_1+\alpha_2 \in T^{-1}(W_1)$

iii) Si $\lambda \in k,\ \alpha \in T^{-1}(W_1) \Rightarrow ¿\lambda\alpha \in T^{-1}(W_1)?$

$\alpha \in T^{-1}(W_1) \Rightarrow \exists \beta \in W_1 / T(\alpha)=\beta$ y $T(\lambda\alpha)=\lambda T(\alpha)=\lambda\beta$

Como W_1 es un subconjunto de W y $\lambda \in k \Rightarrow \lambda\beta \in W_1$ entonces

$\lambda\alpha \in T^{-1}(W_1)$.

$\therefore T^{-1}(W_1)$ es un subespacio de V.

c) $\Rightarrow)$ Supongamos que T es inyectiva (hipótesis)

Supongamos $T(\alpha)=\theta'$ y por otra parte $T(\theta)=\theta'$

$\Rightarrow T(\alpha)+T(\beta)\Rightarrow \alpha=\theta$

$\Leftarrow)$ Supongamos que $T(\alpha)=\theta' \Rightarrow \alpha=\theta$

Supongamos $T(\alpha)=T(\beta)\Rightarrow T(\alpha)-T(\beta)=\theta'$

$\Rightarrow T(\alpha-\beta)=\theta' \Rightarrow \alpha-\beta=\theta \Rightarrow \alpha=\beta,\ \alpha$ y β son cualquiera $\Rightarrow T$ es inyectiva.

d) $\sum_{i=1}^{r}\alpha_i T(v_i)=\theta'$, como T es transformación lineal.

$\sum_{i=1}^{r}\alpha_i T(v_i)=T\left(\sum_{i=1}^{r}\alpha_i v_i\right)=\theta'$ y como T es inyectiva

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{r}\alpha_i v_i=\theta$ y como $\{v_1,v_2,...,v_r\}$ son linealmente independientes.

$\Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_r=0$

Por lo tanto $\{T(v_1),T(v_2),...,T(v_r)\}$ es linealmente independiente.

Ejemplo. - Si $F:M_{2\times 2}(R)\rightarrow R^2 \,/\, F\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\right)=(a_{11}+a_{22},a_{21})$

¿F es una transformación lineal? ¿F es inyectiva?

<u>Solución</u>

i) Si $\alpha,\beta\in M_{2\times 2}(R)\Rightarrow \alpha=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix},\ \beta=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}$

$$\alpha+\beta=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$$

$$T\left(\alpha+\beta\right)=\left(\left(a_{11}+b_{11}\right)+\left(a_{22}+b_{22}\right), a_{21}+b_{21}\right)$$

$$=\left(a_{11}+a_{22}, a_{21}\right)+\left(b_{11}+b_{22}, b_{21}\right)=T\left(\alpha\right)+T\left(\beta\right)$$

$ii)$ Sea $\lambda \in R,\ \alpha \in M_{2\times 2}\left(R\right) \Rightarrow \lambda\alpha=\begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{bmatrix}$

$$T\left(\lambda\alpha\right)=\left(\lambda a_{11}+\lambda a_{22}, \lambda a_{21}\right)=\lambda\left(a_{11}+a_{22}, a_{21}\right)=\lambda T\left(\alpha\right)$$

Luego T es una transformación lineal.

F *es inyectiva si* $F\left(\alpha\right)=\theta' \Rightarrow \alpha=\theta$

$$\alpha \in M_{2\times 2}\left(R\right) \Rightarrow \alpha=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow F\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right)=\left(0,0\right)$$

$$\Rightarrow \left(a_{11}+a_{22}, a_{21}\right)=\left(0,0\right) \Rightarrow \begin{cases} a_{11}+a_{22}=0 \\ a_{21}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a_{11}=-a_{22} \\ a_{21}=0 \end{matrix}$$

Luego $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow F$ *no es inyectiva.*

Ejemplo. - Si $F: R^4 \to R^6$ tal que $F\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right)=\left(0, x_1, 0, x_2, x_3, x_4\right)$

¿F es una transformación lineal? ¿F es inyectiva?

Solución

i) $F\left[\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right)+\left(y_1, y_2, y_3, y_4\right)\right]=F\left(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3, x_4+y_4\right)$

$$=\left(0, x_1+y_1, 0, x_2+y_2, x_3+y_3, x_4+y_4\right)$$

$$F\left[(x_1,x_2,x_3,x_4)+(y_1,y_2,y_3,y_4)\right]=(0,x_1,0,x_2,x_3,x_4)+(0,y_1,0,y_2,y_3,y_4)$$

$$=F(x_1,x_2,x_3,x_4)+F(y_1,y_2,y_3,y_4)$$

ii) $F\left(\lambda(x_1,x_2,x_3,x_4)\right)=\lambda F(x_1,x_2,x_3,x_4)$ por comprobar

$$F\left(\lambda(x_1,x_2,x_3,x_4)\right)=F(\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3,\lambda x_4)=(0,\lambda x_1,0,\lambda x_2,\lambda x_3,\lambda x_4)$$

$$=\lambda(0,x_1,0,x_2,x_3,x_4)=\lambda F(x_1,x_2,x_3,x_4)$$

Luego de (i) y (ii) F es una transformación lineal.

$$F(x,y,z,w)=(0,0,0,0,0,0)\Rightarrow(x,y,z,w)=(0,0,0,0)$$

$$F(x,y,z,w)=(0,x,0,y,z,w)=(0,0,0,0,0,0)\Rightarrow x=y=z=w=0$$

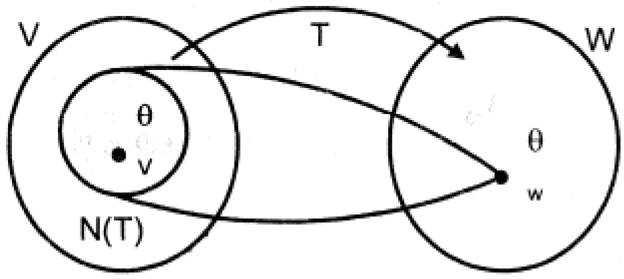
Luego $F(x,y,z,w)=(0,0,0,0,0,0)\Rightarrow(x,y,z,w)=(0,0,0,0)$ entonces F es inyectiva.

1.7. Núcleo e imagen de una transformación lineal

a) Definición. - Sea $T:V\to W$ una transformación lineal, llamaremos núcleo de la transformación lineal T al conjunto denotado por "N(T)" y queda definido como:

$$\boxed{N(T)=\{v\in V\,/\,T(v)=\theta_w\}}$$

Es decir, el núcleo de T es el conjunto formado por todos los elementos de V tales que sus imágenes mediante T son igual al elemento nulo de W.



El núcleo de toda transformación lineal es la pre-imagen del vector nulo del segundo espacio, es decir $\boxed{N(T)=T^{-1}(\theta_w)}$

Por definición, un vector perteneciente a V es un elemento del núcleo si y solo sí su imagen es el vector nulo de W.

$$\boxed{x \in N(T) \Leftrightarrow T(x)=\theta_w}$$

Ejemplo. - Determinar el núcleo de la transformación lineal $f: R^3 \to R^2$ tal que $F(x,y,z)=(x-z, y-z)$

<u>Solución</u>

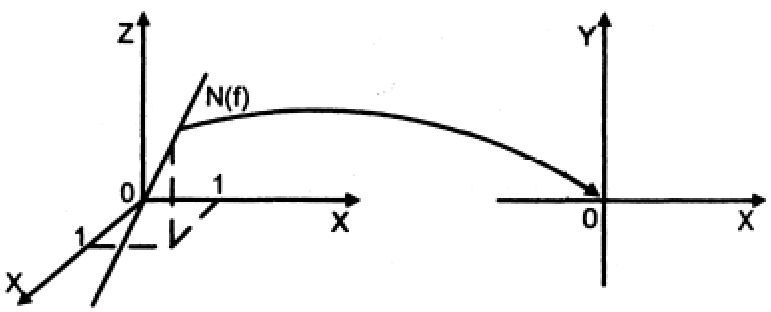
$$N(f)=\{(x,y,z)\in R^3 \,/\, f(x,y,z)=(0,0)\}$$

Como $f(x,y,z)=(0,0)$ de donde $(x-z,y-z)=(0,0)$ por igualdad se tiene:

$$\begin{cases} x-z=0 \\ \qquad\qquad \Rightarrow x=z \;\wedge\; y=z \;\wedge\; x=y=z \\ y-z=0 \end{cases}$$

Luego $N(f)=\{(x,y,z)\in R^3 \,/\, x=y=z\}$

Representa una recta en R^3



Observación. - De la definición de núcleo de una transformación lineal

$f:V \to W$ observamos que $N(f) \subset V$.

También demostraremos que $f(\theta_v) = \theta_w$ de donde $\theta_w \in N(f)$ y de esto se tiene que el núcleo de toda transformación lineal de f es no vacío.

b) Proposición. - Sean $(V,+,k,.)$ y $(W,+,k,.)$ dos espacios vectoriales y $f:V \to W$ una transformación lineal, demostrar que: $(N(f),+,k,.)$ es un subespacio de $(V,+,k,.)$

<u>Demostración</u>

i) $N(f) \neq \phi$ de la observación

ii) Si $x, y \in N(f) \Rightarrow x + y \in N(f)$ por probar

$$\begin{cases} x \in N(f) & f(x) = \theta_w \\ & \Rightarrow \qquad \text{sumando } f(x) + f(y) = \theta_w \\ y \in N(f) & f(y) = \theta_w \end{cases}$$

$f(x+y) = \theta_w$ por qué f es transformación lineal

$\Rightarrow x + y \in N(f)$ definición del núcleo.

iii) $\lambda \in k,\ x \in N(f) \Rightarrow \lambda x \in N(f)$ por probar

Si $x \in N(f) \Rightarrow f(x) = \theta_w \Rightarrow \lambda f(x) = \lambda \theta_w$

$\Rightarrow f(\lambda x) = \theta_w$ puesto que f es transformación lineal

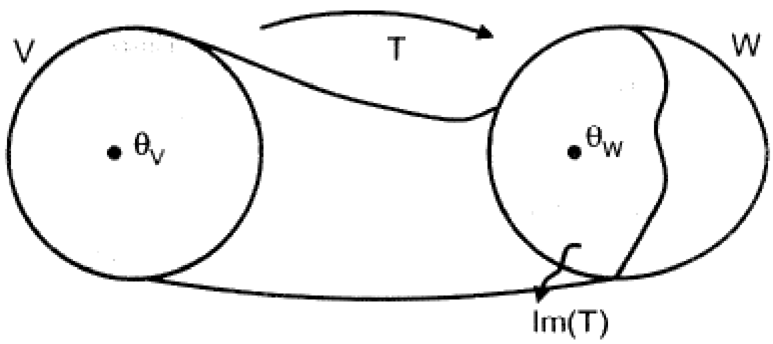
$\Rightarrow \lambda x \in N(f)$ definición de núcleo.

Por lo tanto $N(f)$ es subespacio de V.

c) Definición. - Sea $T:V \to W$ una transformación lineal. Llamaremos imagen de la transformación lineal T al conjunto denotado por "Im(T)" que definiremos como:

$$\boxed{\operatorname{Im}(T) = \{w \in W \,/\, \exists v \in V \wedge T(v) = w\}}$$

También se puede expresar en la forma $\operatorname{Im}(T) = \{T(v) / v \in V\}$



Es decir: $w \in W$ es un elemento de la imagen de T, si existe $v \in V$ tal que $T(v) = w$ esto quiere decir que la imagen de una transformación lineal es la totalidad de las imágenes de los vectores del primer espacio.

Observación. - Sabemos que $T(\theta_v) = \theta_w$ de donde $\theta_w \in \operatorname{Im}(T)$ lo que significa que $\operatorname{Im}(T) \neq \phi$.

d) Proposición. - Sean $(V,+,k,.)$ y $(W,+,k,.)$ dos espacios vectoriales y

$f:V \to W$ una transformación lineal, demostrar que:

$(\operatorname{Im}(f),+,k,.)$ es un subespacio de $(W,+,k,.)$.

Demostración

i) $\operatorname{Im}(f) \neq \phi$ de la observación

ii) Si $u, v \in \operatorname{Im}(f) \Rightarrow u+v \in \operatorname{Im}(f)$ por probar

$$\begin{cases} u \in \operatorname{Im}(f) \\ \\ v \in \operatorname{Im}(f) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists x \in V \,/\, f(x) = u \\ \\ \exists y \in V \,/\, f(y) = v \end{cases} \quad \text{sumando}$$

$f(x) + f(y) = u + v$, f es transformación lineal

$f(x+y) = u+v$ y $x + y \in V$

$\Rightarrow u + v \in \operatorname{Im}(f)$ definición de imagen.

iii) Sea $\lambda \in k,\ u \in \operatorname{Im}(f) \Rightarrow \lambda u \in \operatorname{Im}(f)$ por probar

Si $u \in \operatorname{Im}(f) \Rightarrow \exists x \in V \,/\, f(x) = u$

$\lambda f(x) = \lambda u$ por ser f transformación lineal

$f(\lambda x) = \lambda u,\ x \in V$ de donde $\lambda u \in \operatorname{Im}(f)$ por definición de Imagen.

Por lo tanto $(\operatorname{Im}(f), +, k, .)$ es un subespacio de W.

Ejemplo. - Sea $f : R^2 \to R^3$ la transformación lineal definida por $f(x, y) = (x+y, x-y, x+2y)$

Hallar Im(f)

Solución

$$\mathrm{Im}(f)=\{(x,y,z)\in R^3 / \exists(a,b)\in R^2 \wedge f(a,b)=(x,y,z)\}$$

$f(a,b)=(x,y,z)$ de donde $(a+b,a-b,a+2b)=(x,y,z)$ por igualdad se tiene:

$$\begin{cases} a+b=x \\ a-b=y \\ a+2b=z \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2a=x+y \\ 3a=2y+z \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x+y}{2}=a \\ \dfrac{2y+z}{3}=a \end{cases}$$

$$\frac{x+y}{2}=\frac{2y+z}{3}\Rightarrow 3x+3y=4y+2z\Rightarrow 3x-y-2z=0$$

$$\therefore\ \mathrm{Im}(f)=\{(x,y,z)\in R^3 / 3x-y-2z=0\}$$

1.8. Teorema

Sean $(V,+,k,.)$ y $(W,+,k,.)$ espacios vectoriales y $T:V\rightarrow W$ una transformación lineal, se cumple:

a) T es inyectiva $\Leftrightarrow N(T)=\{\theta_w\}$

b) Sea $\{v_1,v_2,...,v_n\}$ un conjunto linealmente dependiente en V, entonces $\{T(v_1),T(v_2),...,T(v_n)\}$ son linealmente dependiente en W.

c) Si $\{v_1,v_2,...,v_n\}$ son vectores de V tales que $\{T(v_1),T(v_2),...,T(v_n)\}$ son linealmente independiente en W, entonces $\{v_1,v_2,...,v_n\}$ son linealmente independiente.

d) Si $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es un conjunto linealmente independiente y T es una transformación lineal inyectiva, entonces $\{T(v_1), T(v_2), ..., T(v_n)\}$ es linealmente independiente de W.

Demostración

a) $\Rightarrow)$ Asumiendo que T es inyectiva probaremos que $N(T) = \{\theta_w\}$ se debe cumplir que $\{\theta_w\} \subset N(T)$.

$\theta_w \in N \Rightarrow \{\theta_w\} \subset N$, ahora falta probar que $N \subset \{\theta_w\}$

Sea $x \in N(T) \Rightarrow T(x) = \theta_w = T(\theta_v) \Rightarrow x = \theta_v$

$$\Rightarrow x \in \{\theta_w\} \Rightarrow N(T) \subset \{\theta_w\}$$

$\therefore\ N(T) \subset \{\theta_w\}$

$\Leftarrow)$ Por demostrar que T es inyectiva

Es decir: si $T(x) = T(y) \Rightarrow x = y$

$F(x) = F(y) \Rightarrow T(x) - T(y) = \theta_w \Rightarrow T(x - y) = \theta_w$

$\Rightarrow x - y \in N(T) \Rightarrow x - y = \theta_v \Rightarrow x = y$

b) Como $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es linealmente dependiente $\Rightarrow \exists\ i$ tal que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \theta_v \ \wedge\ \alpha_i \neq 0$, aplicando T (transformación lineal) se tiene:

$$T\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i\right)=T(\theta_v)\ \wedge\ \alpha_i\neq 0\ \Rightarrow\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i T(v_i)=\theta_w\ \wedge\ \alpha_i\neq 0$$

$\{T(v_1),T(v_2),...,T(v_n)\}$ son linealmente dependiente en W.

c) Consideremos una combinación lineal en V.

$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i=\theta_v$ por demostrar que $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n=0$

Aplicando la transformación lineal T se tiene: $T\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i\right)=T(\theta_v)=\theta_w$

$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i T(v_i)=\theta_w$ como $T(v_1),T(v_2),...,T(v_n)$ son linealmente independiente

Entonces $\{v_1,v_2,...,v_n\}$ son linealmente independiente.

d) Consideremos una combinación lineal en W.

$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i T(v_i)=\theta_w$, aplicando Transformación Lineal

$$T\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i\right)=\theta_w\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i\in N(T)$$

Como T es inyectiva por la parte (a) se tiene:

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i=\theta_v\Rightarrow\alpha_i=0,\ \forall\ i=1,2,...,n$$

Por ser $v_1,v_2,...,v_n$ linealmente independiente por lo tanto $\{T(v_1),T(v_2),...,T(v_n)\}$

es linealmente independiente.

Ejemplo. - Sea $f : R^2 \to R^2$ una transformación lineal, probar que: T es inyectiva $\Leftrightarrow T(1,0)\ y\ T(1,0)$ es linealmente independiente.

Solución

$\Rightarrow$) T es inyectiva $\Rightarrow T(1,0)\ y\ T(1,0)$ son linealmente independiente consideremos la combinación lineal en R^2.

$\alpha T(1,0) + \beta T(1,0) = (0,0) \Rightarrow \alpha = \beta = 0$ por probar.

Como T es una transformación lineal entonces:

$T\left[\alpha(1,0) + \beta(1,0)\right] = (0,0) \Rightarrow T(\alpha,\beta) = (0,0)$, como T es inyectiva

$$\Rightarrow (\alpha,\beta) = (0,0) \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

Por lo tanto $T(1,0)\ y\ T(1,0)$ son linealmente independiente.

1.9. Dimensiones del núcleo y de la imagen

Teorema. - Sea $(V,+,k,.)$ un espacio vectorial de dimensiones finita y $f : V \to W$ una Transformación lineal entonces: $\dim(V) = \dim N(f) + \dim \operatorname{Im}(f)$

Demostración

1ro. Suponiendo que $\operatorname{Im}(f) = \{\theta\} \Rightarrow \dim \operatorname{Im}(f) = 0$, de donde se tiene: $\dim(V) = \dim N(f)$

2do. Suponiendo que $\operatorname{Im}(f) \neq \{\theta\}$ y como V tiene dimensión finita entonces Im(f) tiene dimensión finita, es decir que:

sí $\{w_1, w_2, ..., w_r\}$ es un conjunto linealmente independiente en Im(f), entonces existe un

conjunto linealmente independiente en $V = \{v_1, v_2, ..., v_r\}$ tal que $f(v_i) = w_i$, $i = 1, 2, ..., r$

3ro. Si $N(f) \neq \{\theta_w\}$, asumimos que $\{u_1, u_2, ..., u_p\}$ es una base de N(f).

Ahora debe probar que $\{v_1, v_2, ..., v_r, u_1, u_2, ..., u_p\}$ es una base de V donde $\dim V = r + p$ y $\dim \mathrm{Im}(f) = r$ y $\dim N(f) = p$

i) Si $\{v_1, v_2, ..., v_r, u_1, u_2, ..., u_p\}$ genera a V $\Rightarrow$ existe escalares $x_1, x_2, ..., x_r, y_1, y_2, ..., y_p$ únicos tales que $\forall v \in V$ es combinación lineal de $\{v_1, v_2, ..., v_r, u_1, u_2, ..., u_p\}$ es decir:

$v = x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_rv_r + y_1u_1 + y_2u_2 + ... + y_pu_p$

Si $v \in V \Rightarrow f(v) \in \mathrm{Im}(f) \Rightarrow$ existen escalares

$x_1, x_2, ..., x_r$ tal que $f(v) = x_1w_1 + x_2w_2 + ... + x_rw_r$

porque $w_1, w_2, ..., w_r$ es una base de la Im(f) como $f(v_i) = w_i$,

$\forall\ i = 1, 2, ..., r$, entonces:

$f(v) = x_1 f(v_1) + x_2 f(v_2) + ... + x_r f(v_r)$

$\quad = f(x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_rv_r)$ porque f es transformación lineal

$f(v) - f(x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_rv_r) = 0$

$f(v - x_1v_1 - x_2v_2 - ... - x_rv_r) = 0$ porque f es transformación lineal.

$\Rightarrow v - x_1v_1 - x_2v_2 - ... - x_rv_r \in N(f)$, definición de N(f)

Luego $\{v - x_1v_1 - x_2v_2 - \ldots - x_rv_r\}$ es combinación lineal de $\{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$ porque es base de N(f) es decir existen $y_1, y_2, \ldots, y_p$ tal que: $v - x_1v_1 - x_2v_2 - \ldots - x_rv_r = y_1u_1 + y_2u_2 + \ldots + y_pu_p$, de donde se tiene: $v = x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots + x_rv_r + y_1u_1 + y_2u_2 + \ldots + y_pu_p$ por lo tanto $\{v_1, v_2, \ldots, v_r, u_1, u_2, \ldots, u_p\}$ genera a V.

ii) Ahora probaremos que $\{v_1, v_2, \ldots, v_r, u_1, u_2, \ldots, u_p\}$ es linealmente independiente.

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots + x_rv_r + y_1u_1 + y_2u_2 + \ldots + y_pu_p = \theta_v$$

$$f\left(x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots + x_rv_r + y_1u_1 + y_2u_2 + \ldots + y_pu_p\right) = f\left(\theta_v\right)$$

$$x_1 f\left(v_1\right) + x_2 f\left(v_2\right) + \ldots + x_r f\left(v_r\right) + f\left(y_1u_1 + y_2u_2 + \ldots + y_pu_p\right) = \theta_w$$

$$x_1w_1 + x_2w_2 + \ldots + x_rw_r + f\left(y_1u_1 + y_2u_2 + \ldots + y_pu_p\right) = \theta_w$$

Como $\{w_1, w_2, \ldots, w_r\}$ es una base de Im(f)

$\Rightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_r = 0$ de donde

$$f\left(y_1u_1 + y_2u_2 + \ldots + y_pu_p\right) = \theta_w \Rightarrow y_1u_1 + y_2u_2 + \ldots + y_pu_p \in N\left(f\right)$$

Y como $\{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$ es una base de N(f) $\Rightarrow y_1 = y_2 = \ldots = y_p = 0$

Por lo tanto $x_1 = x_2 = \ldots = x_p = y_1 = y_2 = \ldots = y_p = 0$ de donde

$\{v_1, v_2, \ldots, v_r, u_1, u_2, \ldots, u_p\}$ es linealmente independiente en consecuencia

$\{v_1, v_2, \ldots, v_r, u_1, u_2, \ldots, u_p\}$ es una base de V.

4to. Del paso 3ro. Se tiene que: $\dim V = r + p$ y como $\dim \mathrm{Im}(f) = r$ y

$\dim N(f) = p$

$\therefore\ \dim V = \dim N(f) + \dim \mathrm{Im}(f)$

Ejemplo. - Dado $T : R^4 \to R^3$ tal que:

$T(x, y, z, w) = (x - y + 2z + 3w, y + 4z + 3w, x + 6z + 6w)$

a) Probar que T es una transformación Lineal

b) Hallar N(T), Im(T) y dim(N(T)), dim(Im(T))

Solución

a) Sea $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$

$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4)$

Por probar: $T(x + y) = T(x) + T(y)$

i) $T(x + y) = T(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4)$

$$= (x_1 + y_1 - x_2 - y_2 + 2x_3 + 2y_3 + 3x_4 + 3y_4,\ x_2 + y_2 + 4x_3 + 4y_3 + 3x_4 + 3y_4, x_1 + y_1 + 6x_3 + 6y_3 + 6x_4 + 6y_4)$$

$$= (x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4, x_2 + 4x_3 + 3x_4, x_1 + 6x_3 + 6x_4) + (y_1 - y_2 + 2y_3 + 3y_4, y_2 + 4y_3 + 3y_4, y_1 + 6y_3 + 6y_4)$$

$$= T(x) + T(y)$$

ii) $\lambda \in R,\ x \in R^4,\ T(\lambda x) = \lambda T(x)$ por probar

$$T(\lambda x) = T\lambda(x_1, x_2, x_3, x_4) = T(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4)$$
$$= (\lambda x_1 - \lambda x_2 + 2\lambda x_3 + 3\lambda x_4, \lambda x_2 + 4\lambda x_3 + 3\lambda x_4, \lambda x_1 + 6\lambda x_3 + 6\lambda x_4)$$
$$= \lambda(x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4, x_2 + 4x_3 + 3x_4, x_1 + 6x_3 + 6x_4) = \lambda T(x)$$

Por lo tanto $T : R^4 \to R^3$ es una transformación lineal.

b) Calculando N(T) = núcleo de la transformación

$$N(T) = \{(x, y, z, w) \in R^4 / T(x, y, z, w) = (0,0,0,0)\}$$

$T(x, y, z, w) = (0,0,0,0)$, de donde se tiene:

$$(x - y + 2z + 3w, y + 4z + 3w, x + 6z + 6w) = (0,0,0)$$

Por igualdad se tiene:

$$\begin{cases} x - y + 2z + 3w = 0 \\ y + 4z + 3w = 0 \\ x + 6z + 6w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 6z + 6w = 0 \\ y + 4z + 3w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -6z - 6w \\ y = -4z - 3w \end{cases}$$

Si $(x, y, z, w) \in N(T) \Rightarrow (x, y, z, w) = (-6z - 6w, -4z - 3w, z, w)$

$$(x, y, z, w) = (-6z, -4z, z, 0) + (-6w, -3w, 0, w) = z(-6, -4, 1, 0) + w(-6, -3, 0,)$$

Luego $N(T) = L\{(-6, -4, 1, 0), (-6, -3, 0,)\}$

De donde una base de $N(T)$ es $\{(-6, -4, 1, 0), (-6, -3, 0,)\}$

De donde $\dim(N(T)) = 2$

Calculando Im(T): imagen de la transformación

$$\operatorname{Im}(T)=\{(x,y,z)\in R^3 / \exists(a,b,c,d)\in R^4 \wedge T(a,b,c,d)=(x,y,z)\}$$

$$T(a,b,c,d)=(x,y,z)\Rightarrow(a-b+2c+3d,b+4c+3d,a+6c+6d)=(x,y,z)$$

Por igualdad $\begin{cases} a-b+2c+3d=x \\ b+4c+3d=y \\ a+6c+6d=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+6c+6d=x+y \\ a+6c+6d=z \end{cases} \Rightarrow x+y=z$

$\operatorname{Im}(T)=\{(x,y,z)\in R^3 / x+y=z\}$, calculando una base para Im(T)

Si $(x,y,z)\in \operatorname{Im}(T)\Rightarrow z=x+y$, reemplazando

$(x,y,z)=(x,y,x+y)=(x,0,x)+(0,y,y)=x(1,0,1)+y(0,1,1)$ luego

$\operatorname{Im}(T)=L\{(1,0,1),(0,1,1)\}$ de donde una base para Im(T) es

$\{(1,0,1),(0,1,1)\}\Rightarrow \dim(\operatorname{Im}(T))=2$

1.10. Teorema fundamental de las transformaciones lineales

Sea $(V,+,k,.)$ y $(W,+,k,.)$ dos espacios vectoriales y $\{v_1,v_2,...,v_n\}$ una base de V, si $\{w_1,w_2,...,w_n\}$ un conjunto cualquiera de vectores de W, entonces existe una única transformación lineal $T:V\rightarrow W$ tal que $T(v_i)=w_i,\ \forall i=1,2,...,n$

<u>Demostración</u>

i) Existencia

Sea $v\in V\Rightarrow v$ se puede expresar de una única forma como

$v=\sum_{i=1}^{n}a_i v_i,\ \forall i=1,2,...,n,\ a_i\in k$ cómo $\{v_1,v_2,...,v_n\}$ es base de V.

Definimos $T : V \to W$ como $T(v) = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i$

Afirmamos: que T es una transformación lineal. En efecto:

Sean $u, v \in V$ y $a, b \in k$ probaremos que: $T(au + bv) = aT(u) + bT(v)$

Como $\begin{cases} u \in V \\ v \in V \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \\ v = \sum_{i=1}^{n} b_i v_i \end{cases}$

$$T(au + bv) = T\left(a\sum_{i=1}^{n} a_i v_i + b\sum_{i=1}^{n} b_i v_i \right) = T\left(\sum_{i=1}^{n} (aa_i) v_i + \sum_{i=1}^{n} (bb_i) v_i \right)$$

$$= T\left(\sum_{i=1}^{n} (aa_i + bb_i) v_i \right) = \sum_{i=1}^{n} (aa_i + bb_i) w_i$$

$$= a\sum_{i=1}^{n} a_i w_i + b\sum_{i=1}^{n} b_i w_i = aT(u) + bT(v)$$

Por lo tanto $T(au + bv) = aT(u) + bT(v)$

ii) Unicidad:

Sea $T : V \to W$ otra transformación lineal tal que $T'(v) = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i$

Mostraremos que $T = T'$

Sea $v \in V$, $T'(v) = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i$ por definición de T'

$= T(v)$ por definición de T

Luego $T'(v) = T(v)$, $\forall v \in V$ entonces $T' = T$

Luego de i) y ii) queda demostrado.

Ejemplos. - Sea $T : R^3 \to R^2$ una transformación lineal definida de tal manera que a los elementos de la base $\{(1,1,0),(1,2,1),(0,1,3)\}$ en R^3 le hace corresponder los vectores $(1,3),(5,1)$ y $(0,1)$ respectivamente.

i) Hallar la imagen de un vector cualquiera de R^3

ii) Hallar la imagen de $(3,-1,5)$ y N(f)

<u>Solución</u>

i) A la terna $(x,y,z)\in R^3$ expresaremos en combinación lineal de los elementos de la base $\{(1,1,0),(1,2,1),(0,1,3)\}$

$$(x,y,z)=\alpha(1,1,0)+\beta(1,2,1)+\gamma(0,1,3)=(\alpha+\beta,\alpha+2\beta+\gamma,\beta+3\gamma)$$

Por igualdad $\begin{cases} x=\alpha+\beta \\ y=\alpha+2\beta+\gamma \\ z=\beta+3\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} \alpha=\dfrac{5x-3y+z}{2} \\ \beta=\dfrac{3y-z-3x}{2} \\ \gamma=\dfrac{x-y+z}{2} \end{array}$

$$(x,y,z)=\frac{5x-3y+z}{2}(1,1,0)+\frac{3y-z-3x}{2}(1,2,1)+\frac{x-y+z}{2}(0,1,3)$$

Como $f(1,1,0)=(1,3),\ f(1,2,1)=(5,1),\ f(0,1,3)=(0,1)$

Como f es una transformación lineal

$$f(x,y,z)=\frac{5x-3y+z}{2}f(1,1,0)+\frac{3y-z-3x}{2}f(1,2,1)+\frac{x-y+z}{2}f(0,1,3)$$

$$= \frac{5x-3y+z}{2}(1,3)+\frac{3y-z-3x}{2}(5,1)+\frac{x-y+z}{2}\,f(0,1)$$

$$= \left(\frac{5x-3y+z+15y-5z-15x}{2},\frac{15x-9y+3z+3y-z-3x+3y+z}{2}\right)$$

$$= \left(6y-5x-2z,\frac{13x-7y+3z}{2}\right)$$

$$\therefore\ f(x,y,z) = \left(6y-5x-2z,\frac{13x-7y+3z}{2}\right)$$

ii) Calculando $f(3,-1,5) = \left(-31,\frac{61}{2}\right)$

$$N(f) = \left\{(x,y,z)\in R^3\ /\ f(x,y,z) = (0,0)\right\}$$

Como $f(x,y,z) = (0,0)$ de donde se tiene:

$\left(6y-5x-2z,\frac{13x-7y+3z}{2}\right) = (0,0)$ por igualdad

$$\begin{cases} 6y-5x-2z=0 \\ 13x-7y+3z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11x+4y=0 \\ z=\dfrac{6y-5x}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{11}{4}x \\ z=-\dfrac{43}{4}x \end{cases}$$

$$(x,y,z)\in N(f) \Rightarrow (x,y,z) = \left(x,-\frac{11}{4}x,-\frac{43}{4}x\right)$$

$$(x,y,z) = x\left(1,-\frac{11}{4},-\frac{43}{4}\right)$$

Luego $N(f) = L\left\{\left(1,-\frac{11}{4},-\frac{43}{4}\right)\right\}$

Ejemplo. - Sea $V = M_{2\times 2}(R)$ y $W = R^3$ y $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

Una base de V en W consideremos los vectores:

$W_1 = (2,1,1),\ W_2 = (2,1,1),\ W_3 = (0,0,0),\ W_4 = (-1,0,1)$.

Hallar la transformación lineal.

Solución

Sea $\alpha \in M_{2\times 2}(R) \Rightarrow \alpha = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ entonces

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b+c+d & b+c+d \\ c+d & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11} = a+b+c+d \\ a_{12} = b+c+d \\ a_{21} = c+d \\ a_{22} = d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = a_{11} - a_{12} \\ b = a_{12} - a_{21} \\ c = a_{21} - a_{22} \\ d = a_{22} \end{cases}$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = (a_{11} - a_{12})\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\alpha_1} + (a_{12} - a_{21})\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\alpha_2} + (a_{21} - a_{22})\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\alpha_3} + a_{22}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\alpha_4}$$

$$T(\alpha) = (a_{11} - a_{12})T(\alpha_1) + (a_{12} - a_{21})T(\alpha_2) + (a_{21} - a_{22})T(\alpha_3) + a_{22}T(\alpha_4)$$

$$T(\alpha) = (a_{11} - a_{12})(2,1,1) + (a_{12} - a_{21})(2,1,1) + (a_{21} - a_{22})(0,0,0) + a_{22}(-1,0-1)$$

$T(\alpha)=(2a_{11}-2a_{21}-a_{22},a_{11}-a_{21},a_{11}-a_{21}+a_{22})$

Ejemplo. - Hallar la transformación lineal $f:R^3\to R^2$ que asigna a los vectores de la base $\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ en R^3, los vectores de la base $\{(1,2),(1,2),(-1,1)\}$ en R^2 respectivamente.

Solución

Determinaremos la imagen de un vector genérico $(x,y,z)\in R^3$ y para esto expresaremos a (x,y,z) como combinación lineal de la base dada.

$(x,y,z)=\alpha(1,1,1)+\beta(1,1,0)+\gamma(1,0,0)=(\alpha+\beta+\gamma,\alpha+\beta,\alpha)$, por igualdad

$$\begin{cases} x=\alpha+\beta+\gamma \\ y=\alpha+\beta \\ z=\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=z \\ \beta=y-z \\ \gamma=x-y \end{cases}$$

$$(x,y,z)=z(1,1,1)+(y-z)(1,1,0)+(x-y)(1,0,0)$$

$$f(x,y,z)=z\,f(1,1,1)+(y-z)\,f(1,1,0)+(x-y)\,f(1,0,0)$$

$$=z(1,2)+(y-z)(1,2)+(x-y)(-1,1)$$

$$=(z+y-z-x+y,2z+2y-2z+x-y)$$

$$\therefore\ f(x,y,z)=(-x+2y,x+y)$$

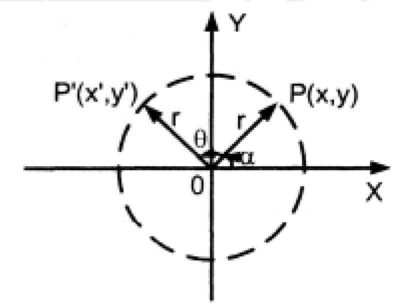
Observación. - Rotación de un Vector (x,y) de R^2

Si rotamos un vector de posición $\overrightarrow{OP}=(x,y)$ en sentido antihorario hasta tomar la posición $\overrightarrow{OP'}=(x',y')$ (ver gráfico) genera el ángulo θ, afirmamos que esta rotación define una transformación lineal.

En efecto:

Las coordenadas de $(x,y)\in R^2$ son:

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = rsen\alpha \end{cases} \quad \ldots..(1)$$



Las coordenadas de $(x',y')\in R^2$ son:

$$\begin{cases} x' = r\cos(\alpha+\theta) \\ y' = rsen(\alpha+\theta) \end{cases} \quad \ldots..(2)$$

De la ecuación (2) se tiene:

$$x' = r\cos(\alpha+\theta) = r[\cos\theta\cos\alpha - sen\theta sen\alpha]$$
$$= r\cos\theta\cos\alpha - rsen\theta sen\alpha = x\cos\theta - ysen\theta$$

Serie Transformaciones Lineales

1.Sea el espacio vectorial real $P=\{ax^2+bx+c \mid a,b,c\in R\}$ y $D:P\to P$ la transformación cuya regla de correspondencia es $D(p(x))=\dfrac{dp(x)}{p(x)}, \forall p(x)\in P$

Determinar a)

a) Si D es una transformación lineal.

Superposición

$$D[(ax^2+bx+c)+(a_1x^2+b_1x+d)] = D(ax^2+bx+c)+D(a_1x^2+b_1x+d)$$

$$D\left[(a+a_1)x^2+(b+b_1)x+(c+d)\right]=2ax+b+2a_1x+b_1$$

$$2(a+a_1)x+b+b_1=2(a+a_1)x+(b+b_1)$$
$\therefore cumple$

Homogeneidad:

$$D\left(\alpha\left(ax^2+bx+c\right)\right)=\alpha\left(D\left(ax^2+bx+c\right)\right)$$
$$D\left(\alpha ax^2+\alpha bx+\alpha c\right)=\alpha(2ax+b)$$
$$2\alpha ax+\alpha b=2\alpha ax+\alpha b$$
$\therefore cumple\ es\ una\ T.\ Lineal$

b) El núcleo de D c) Recorrido de D

$B=\{1,x,x^2\}$
Transformar
$D(1)=0$
$D(x)=1$ $G=\{0,1,2x\}$
$D(x^2)=2x$

$$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&2&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix} \qquad \{x,1\}$$
$a(x)+b(1)=ax+b$
$D(p)\ \{ax+b \mid a,b\in R\}$ Recorrido $Dim:2$

$$D\left(ax^2+bx+c\right)=\frac{dp(x)}{p(x)}$$
$2ax+b=0x+0$
$2a=0$ $b=0$
$a=0$ $N(D)\ \{0x+0\}$
$N.\ Dim:2$
$\text{Dim N}(\text{D})+\text{Dim Rec}(\text{D})=\text{Dominio Dim}$

d) Si existe la inversa de D. {La dimensión del dominio debe ser igual a la dimensión del codominio}

Por lo tanto, si existe la inversa porque las dimensiones son iguales.

2. Sea P_1 el espacio vectorial real de polinomios de grado menor o igual a uno con coeficientes reales. La matriz asociada a la transformación lineal $T: P_1 \rightarrow R_3$ referida a las bases: $A=\{2x+1,-x+1\}$ y $B=\{(0,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\}$ es $M_B^A(T)=\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 4 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

Obtener

a) La regla de correspondencia de T

$$M_B^A(T)(u)_A=(T(\bar{u}))_B$$

$$\bar{u}=ax+b$$

$$ax+b=\alpha_1(2x+1)+\alpha_2(-x+1)=\alpha_1 2x+\alpha_1-\alpha_2 x+\alpha_2$$

$$ax+b=(2\alpha_1-\alpha_2)x+(\alpha_1+\alpha_2)$$

$$\begin{cases} 2\alpha_1-\alpha_2=a \\ \alpha_1+\alpha_2=b.....\times(-2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1-\alpha_2=a \\ -2\alpha_1-2\alpha_2=-2b \end{cases}$$

$$3\alpha_1=a+b \qquad -3\alpha_2=a-2b$$

$$\alpha_1=\frac{a+b}{3} \qquad \alpha_2=\frac{-a+2b}{3}$$

$$\frac{a+b}{3}+\frac{-a+2b}{3}=\frac{a+b-a+2b}{3}=\frac{3b}{3}=b$$

$$\underset{\text{Vector del Dominio}}{(\bar{u})_A}=\left(\frac{-a+2b}{3},\frac{a+b}{3}\right)$$

$$\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 4 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 2}\begin{bmatrix} \frac{-a+2b}{3} \\ \frac{a+b}{3} \end{bmatrix}_{2\times 1}=\begin{bmatrix} 5a-10b+a+b \\ -4a+8b+a+b \\ a-2b-a-b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6a-9b \\ -3a+9b \\ -3b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2a-3b \\ -a+3b \\ -b \end{bmatrix}$$

$$T(ax+b)=2a-3b(0,0,1)+(-a+3b)(0,1,1)+(-b)(1,1,1)$$

$$(0,0,2a-3b)+(0,-a+3b,-a+3b)+(-b,-b,-b)$$

$$(0+0-b,0-a+3b-b,2a-3b-a+3b-b)$$

$$(-b,-a+2b,a-b)$$

$$T(ax+b)=(-b,-a+2b,a-b)$$

Núcleo y recorrido de T

$B\{1,x\}$

$T(1)=(-1,2,-1)$ G$\{(-1,2,-1),(0,-1,1)\}$

$T(x)=(0,-x,x)$

$$\begin{bmatrix}-1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

Base Recorrido $\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}\ \rightarrow$ R

$a(1,0,-1)+b(0,1,-1)=(a,b,-a-b)$

$T(p_1)=\{(a,b,-a-b)\,|\,a,b\in R\}\rightarrow$ Recorrido

$(-b,-a+2b,a-b)=(0,0,0)$

$-b=0 \qquad \rightarrow b=0$

$-a+2b=0 \quad \rightarrow a=0$

$a-b=0$

$\therefore N(T)=(0)$.....*Núcleo*

3. Sea el espacio vectorial real $P=\{ax^2+bx+c\,|\,a,b,c\in R\}$ y la transformación lineal $F:P\rightarrow P$ cuya regla de correspondencia es $F(ax^2+bx+c)=(a+2b)x^2+(a+c)x+(2b-c)$

a) Núcleo de F y dimensión N(F)

$(a+2b)x^2+(a+c)x+(2b-c)=0x^2+0x+0$

$a+2b=0$

$a+c=0$

$2b-c=0$

$$\begin{array}{cccc} a\ \ b\ \ c & f_2 - f_1 & f_2\div(-2) & f_3 - 2f_2 \\ \begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -1\end{bmatrix} \rightarrow & \begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 2 & -1\end{bmatrix} \rightarrow & \begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -\tfrac{1}{2}\\ 0 & 2 & -1\end{bmatrix} \rightarrow & \begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -\tfrac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\end{array}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -\tfrac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} a+c=0 \\ b-\frac{1}{2}c=0\end{array} \qquad \begin{array}{l} a=-c \\ b=\frac{1}{2}c\end{array}$$

$N(F)=\left\{-cx^2+\frac{1}{2}cx+c\,|\,c\in R\right\}$ $_{Dim}$*Núcleo* $\bar{c}$ 1

b) Recorrido de F

Base canónica de P

$\{x^2, x, 1\}$

$G = \{x^2 + x, 2x^2 + 2, x - 1\}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_2 \Leftrightarrow f_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_3 - 2f_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_3 + 2f_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_1 - f_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Base Recorrido $\{x^2 + 1, x - 1\}$

$a(x^2 + 1) + b(x - 1) = ax^2 + a + bx - b = ax^2 + bx + (a - b)$

$F(P) = \{ax^2 + bx + (a - b) \mid a, b \in R\}$ $\quad$ Dim Recorrido $= 2$

5. Sea el espacio vectorial real $P = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in R\}$ y la transformación lineal $T : R^2 \to P$ tal que:

$T(1,2) = 2x^2 - x + 1$

$T(2,1) = x^2 + x + 2$

Determinar la regla de correspondencia de T.

$T(1,2) = T(1,0) + 2T(0,1) = 2x^2 - x + 1$

$2T(0,1) = 2x^2 - x + 1 - T(1,0) \to T(0,1) = x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}T(1,0)$

$2T(0,1) + T(1,0) \to 2T(0,1) + x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}T(1,0) = x^2 + x + 2$

$T(0,1) = x^2 - x$

$\frac{3}{2}T(1,0) = x^2 + x + 2 - x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \to \frac{3}{2}T(1,0) = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$

$T(1,0) = x + 1$

$T(0,1) = x^2 + x + 2 - 2(x + 1) \to x^2 + x + 2 - 2x - 2$

$T(a,b) = T(a(1,0) + b(0,1)) = aT(1,0) + bT(0,1)$

$ax + a + bx^2 - bx \to bx^2 + (a - b)x + a$

$T(1,2) = 2x^2 - x + 1$

$T(2,1) = x^2 + x + 2$

8. Sea $T:R^3 \to R^2$ la transformación lineal donde:

$$T(1,0,0)=(2,3)$$
$$T(0,1,0)=(-1,2)$$
$$T(0,0,1)=(1,2)$$

Determina la matriz asociada a la transformación T referida a las bases:

$$A=\{(1,1,0),(0,1,1),(0,0,1)\} \text{ y } B=\{(1,1),(0,1)\}$$

$$T:R^3 \to R^2$$

$$M_B^A(T)$$
$$T(1,1,0)=T(1,0,0)+T(0,1,0)=(2,3)+(-1,2)=(1,5)$$
$$T(0,1,1)=T(0,1,0)+T(0,0,1)=(-1,2)+(1,2)=(0,4)$$
$$T(0,0,1)=(1,2)$$

$$T(1,1,0)=(1,5)=\alpha_1(1,1)+\alpha_2(0,1)$$
$$(\alpha_1,\alpha_1)+(0,\alpha_2)=(1,5)$$
$$\alpha_1=1 \wedge \alpha_1+\alpha_2=5$$
$$1+\alpha_2=5$$
$$\alpha_2=4$$

$$T(0,1,1)=(0,4)=\beta_1(1,1)+\beta_2(0,1)$$
$$(\beta_1,\beta_1)+(0,\beta_2)=(0,4)$$
$$(\beta_1,\beta_1+\beta_2)=(0,4)$$
$$\beta_1=0 \qquad \beta_2=4$$

$$T(0,0,1)=(1,2)=\gamma_1(1,1)+\gamma_2(0,1)$$
$$(1,2)=(\gamma_1,\gamma_1)+(0,\gamma_2)$$
$$(1,2)=(\gamma_1,\gamma_1+\gamma_2)$$
$$\gamma_1=1 \qquad \gamma_2=1$$

$$M_B^A(T)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 4 & 4 & 1\end{bmatrix}$$

$$M_B^A(T)\left(\bar{u}\right)_A=T\left(\bar{u}\right)_B$$

$$(x,y,z)=\alpha_1(1,1,0)+\alpha_2(0,1,1)+\alpha_3(0,0,1)$$

$$(x,y,z)=(\alpha_1,\alpha_1,0)+(0,\alpha_2,\alpha_2)+(0,0,\alpha_3)$$

$$(x,y,z)=(\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3)$$

$$x=\alpha_1 \qquad y=\alpha_1+\alpha_2 \qquad z=\alpha_2+\alpha_3$$

$$\alpha_2=y-x \qquad \alpha_3=z-y+x$$

$$\left(\bar{u}\right)_A=(x,y-x,z-y+x)$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 4 & 4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y-x\\ z-y+x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+z-y+x\\ 4x+4y-4x+z-y+x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x-y+z\\ x+3y+z\end{bmatrix}$$

$$T(x,y,z)=(2x-y+z)(1,1)+(x+3y+z)(0,1)$$

$$(2x-y+z,2x-y+z+x+3y+z)=(2x-y+z,3x+2y+2z)$$

$$T(x,y,z)=(2x-y+z,3x+2y+2z)$$

10. Sean el espacio vectorial real $P_2=\left\{ax^2+bx+c \mid a,b,c\in R\right\}$ y las transformaciones lineales $T:R^3\rightarrow R^2$ y $S:R^3\rightarrow P_2$ cuyas matrices asociadas respecto a la base $A=\left\{(1,1,0),(0,1,0),(0,0,1)\right\}$ y $B=\left\{1,x,x^2\right\}$ son:

$$M_B^A(T)=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & -1\end{bmatrix} \qquad M_B^A(S)=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Obtener la regla de correspondencia de S + T

$$M_B^A(S)+M_B^A(T)$$
$$M(S+T)=M_B^A(S)+M_B^A(T)$$
$$M_B^A(S+T)=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&-1&-1\\1&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&-1&0\\-1&2&1\\-1&1&-1\end{bmatrix}$$
$$\therefore M_B^A(S+T)=\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&1&0\\0&1&0\end{bmatrix}$$
$$(x,y,z)=\alpha_1(1,1,0)+\alpha_2(0,1,0)+\alpha_3(0,0,1)$$
$$(x,y,z)=(\alpha_1,\alpha_1,0)+(0,\alpha_2,0)+(0,0,\alpha_3)$$
$$(a,b,c)=(\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_3)$$
$$\alpha_1=a \qquad \alpha_3=c$$
$$\alpha_1+\alpha_2=b$$
$$\alpha_2=b-\alpha_1$$
$$\alpha_2=b-a$$
$$(\bar{u})_A=(a,b-a,c)$$

$$\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&1&0\\0&1&0\end{bmatrix}_{3\times3}\begin{bmatrix}a\\b-a\\c\end{bmatrix}_{3\times1}=\begin{bmatrix}a+c\\-a+b-a\\b-a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+c\\-2a+b\\b-a\end{bmatrix}$$

$$T(a,b,c)=(a+c)1+(-2a+b)x+(b-a)x^2$$
$$T(S+T)=(b-a)x^2+(-2a+b)x+(a+c)$$

11. Sean $M_{2\times2}$ el espacio vectorial real de las matrices simétricas de orden dos con elementos reales y P_2 el espacio vectorial real de los polinomios de grado menor o igual a dos coeficientes reales, y sea $T:M_{2\times2}\to P_2$ la transformación lineal definida por:

$$T\left(\begin{bmatrix}a&b\\b&c\end{bmatrix}\right)=(a+b)x^2+bx+(a-c)$$

Si es posible determinar la regla de correspondencia de T^{-1} considerando las bases:

$$A=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&-1\\-1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&2\end{bmatrix}\right\} \quad y \quad B=\{x^2,x,1\}$$

De $M_{2\times 2}$ y P_2 respectivamente. La transformación debe ser biyectiva (1 a 1).

$$T^{-1} : P_2 \to M_{2\times 2}$$
$$M_B^A(T) \to \det M_B^A(T) \neq 0$$

$$T\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = x^2 + 1 \qquad\qquad T\left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right] = -x^2 - x$$

$$x^2 + 1 = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_3 \qquad\qquad -x^2 - x = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_3$$

$$\alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = 0 \qquad\qquad \alpha_1 = -1 \quad \alpha_2 = -1$$

$$\alpha_3 = 1 \qquad\qquad \alpha_3 = 0$$

$$(1,0,1) \qquad\qquad (-1,-1,0)$$

$$T\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right] = -2$$
$$-2 = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_3$$
$$\alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = 0 \quad \alpha_3 = -2$$
$$(0,0,-2)$$

$$M_B^A(T) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad \det M_B^A(T) = 2$$

$$\left(M_B^A(T)\right)^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{f_3 - f_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{f_2 \times (-1)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{f_2 + f_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{f_3 \div (-2)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{f_1 + f_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Cambian Dominio inversa

$$M_A^B\left(T^{-1}\right)=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 1/2 & -1/2 & -1/2\end{bmatrix} \qquad M_A^B\left(T^{-1}\right)\left(\overline{u}\right)_B=\left[T^{-1}\left(\overline{u}\right)\right]$$

$$M_A^B\left(T^{-1}\right)=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 1/2 & -1/2 & -1/2\end{bmatrix} \qquad \begin{array}{c} ax^2+bx+c=\alpha_1x^2+\alpha_2x+\alpha_3\\ ax^2+bx+c=\alpha_1x^2+\alpha_2x+\alpha_3\\ \alpha_1=a \quad \alpha_2=b \quad \alpha_3=c\end{array}$$

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 1/2 & -1/2 & -1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a-b\\ -b\\ (1/2)a-(1/2)b-(1/2)c\end{bmatrix}$$

$$T\left(ax^2+bx+c\right)=(a-b)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+(-b)\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}+\left((1/2)a-(1/2)b-(1/2)c\right)\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}a-b & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & b\\ b & a\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & a-b-c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a-b & b\\ b & a-b-c\end{bmatrix}$$

$$T\left(ax^2+bx+c\right)=\begin{bmatrix}a-b & b\\ b & a-b-c\end{bmatrix}$$

14. Sea $T:R^2\to R^2$ una transformación lineal cuyo efecto geométrico sobre el cuadro unitario es el que se muestra en la figura.

Obtener la matriz asociada a T referida a las bases.

$$A=\{(1,1),(0,1)\} \quad y \quad B=\{(0,2),(-1,1)\} \quad de\ R^2$$

$$T(0,1)=(1,-1) \quad ; \quad T(0,0)=(0,0) \quad ; \quad T(1,1)=(2,-1) \quad ; \quad T(1,0)=(1,0)$$

$$\begin{aligned} T(a,b)&=aT(1,0)+bT(0,1)=a(1,0)+b(1,-1)\\ &=(a,0)+(b,-b)=(a+b,-b)\end{aligned}$$

$$T(a,b)=(a+b,-b)$$

$M_B^A(T)$

$T(1,1)=(2,-1)=\alpha_1$

$(2,-1)=\alpha_1(0,2)+\alpha_2(-1,1)$

$(2,-1)=(-\alpha_2,2\alpha_1+\alpha_2)$

$-\alpha_2=2 \qquad 2\alpha_1+\alpha_2=-1$

$\alpha_2=-2 \qquad 2\alpha_1-2=-1$

$2\alpha_1=1$

$\alpha_1=\frac{1}{2}$

$T(0,1)=(1,-1)$

$(1,-1)=(-\alpha_2,2\alpha_1+\alpha_2)$

$\alpha_2=-1 \qquad 2\alpha_1+\alpha_2=-1$

$2\alpha_1-1=-1$

$\alpha_1=0$

$$M_B^A(T)=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

16. Sean el espacio vectorial real $M=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \mid a,b,c\in R\right\}$ y el operador lineal $F:M\to M$ definido por: $T\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+b & a+b \\ a+b & 2c \end{bmatrix}$

Determinar:

a) Los valores característicos de F

b) Una matriz diagonal D asociada a F y la base a la que está referida dicha matriz D.

a) $\det(A-\lambda I)=0 \qquad$ A=M$(T)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$T\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\alpha_1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}+\alpha_3\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix}$$

$\alpha_1=1 \qquad \alpha_2=1 \qquad \alpha_3=0$

$$A-\lambda I=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-\lambda&1&0\\1&1-\lambda&0\\0&0&2-\lambda\end{bmatrix}=-\lambda^3+4x^2-4x$$

$-x\left(x^2-4x+4\right)$

$-x\left(x-2\right)^2$

$x\left(x-2\right)^2=0$

$x=0 \qquad \left(x-2\right)^2=0$

$\qquad\qquad x=2$

$x_1=0 \qquad x_2x_3=2$

Vectores característicos

$\left(A-\lambda I\right)\bar{u}=\bar{0}$

$\lambda_1=0$

$$\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+b\\a+b\\2c\end{bmatrix} \qquad \begin{matrix}a+b=0\to a=a\\a+b=0\to b=-a\\2c=0\to c=0\end{matrix}$$

$$u\left(\lambda_1\right)=\left\{\begin{bmatrix}a&-a\\-a&0\end{bmatrix}\mid a\in R,a\neq 0\right\}$$

$x_3\lambda_2=2$

$$\begin{bmatrix}-1&1&0\\1&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-a+b\\a-b\\0c\end{bmatrix} \qquad \begin{matrix}-a+b=0\\a-b=0\\ \end{matrix} \qquad \begin{matrix}a=k_0\\b=k_0\\c=k_1\end{matrix}$$

Valores característicos

$\lambda_1=0 \qquad \lambda_2=2$

$$\begin{bmatrix}k_0&k_0\\k_0&k_1\end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix}k_0=1\\k_1=2\end{matrix} \qquad 2\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&2\\2&4\end{bmatrix}$$

Vectores característicos

$$u\left(\lambda_1\right)=\left\{\begin{bmatrix}k&-k\\-k&0\end{bmatrix}\mid k\in R,k\neq 0\right\}$$

$$u\left(\lambda_2,\lambda_3\right)=\left\{\begin{bmatrix}k_0&k_0\\k_0&k_1\end{bmatrix}\mid k_0,k_1\in R\wedge k_0,k_1\neq 0\right\}$$

19. Sea el operador lineal $F: R^2 \to R^2$ cuya regla de correspondencia es $F(x, y) = (4x - 5y, 2x - 3y)$

a) Una matriz asociada de M a F.

M(F):

$$T(0,1) = (-5,-3) = \alpha_1(1,0) + \alpha_2(0,1) = (\alpha_1, \alpha_2)$$
$$\alpha_1 = -5 \qquad \alpha_2 = -3$$

$$T(1,0) = (4,2)$$
$$\alpha_1 = 4 \qquad \alpha_2 = 2$$

$$M(F) = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

b) Valores característicos de F

$$\det(A - \lambda I) = 0$$
$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4-\lambda & -5 \\ 2 & -3-\lambda \end{bmatrix} = x^2 - x - 2$$
$$(x+1)(x-2) \quad \to \quad \lambda_1 = -1 \quad \wedge \quad \lambda_2 = 2$$

c) Los espacios característicos de F

$$(A - \lambda I)\overline{u} = \overline{0}$$
$$\lambda = -1$$
$$\begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x & -5y \\ 2x & -2y \end{bmatrix} \to \begin{matrix} -3 \\ +4 \end{matrix} \begin{cases} -4x + 4y = 0 \\ -3x + 3y = 0 \end{cases} \to \begin{matrix} -3x = -3y \\ x = y \end{matrix}$$
$$-4x + 4y = 0 \to x = y$$
$$u(\lambda_1) = \{(y, y) \mid y \in R \wedge y \neq 0\} \quad \to \quad (x, y) = (y, y) \wedge y \in R$$

$$\lambda = -2$$
$$\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & -5y \\ 2x & -5y \end{bmatrix} \to x = \frac{5}{2} y \wedge y \in R$$

d) Una matriz diagonal $u(\lambda_2) = \left\{ \left(\frac{5}{2} y, y \right) \mid y \in R \wedge y \neq 0 \right\}$ y una matriz diagonalizada.

$$D = P^{-1}AP$$

$$P = \begin{bmatrix} k_1 & \frac{5}{2}k_2 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix} \rightarrow k_1 = 1 \quad \wedge \quad k_2 = 1$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Bibliografía

1. H. Anton. Algebra Lineal. Editorial Limusa.
2. Apostol, Tom. Calculus, Vol II. Editorial Reverted, España, 1978.
3. Barahona D., Manuel.Investigacin de Operaciones I (version preliminary). Universidad de Atacama (Chile), 1995.
4. Diaday, E., Lemaire, J., Pouget, J. et Test, F. Elements de análayses de Donne's. Dunod, Paris, 1989.
5. Halmos P. Espacios Vectoriales Finito-Dimensionales. CECSA, México, 1965.
6. Hamdy A., Taha.Investigacin de Operaciones: una introduccin (traducción de Jos de Jess Acosta F.). Representaciones y Servicios de Ingeniera, S.A. México, 1981.
7. Hoffman, K. y Kunze, Algebra Lineal (tradución de Hugo A. Finsterbusc). Ediciones Zacatenco, México, 1987.
8. Lang, Serge. Algebra Lineal. Fondo Educativo Interamericano, Bogota, 1974.
9. Larson, E. Introduccin al Algebra Lineal. Limusa, México, 1995.
10. Schrage, Linus. Linear and Quadratic Programming with LINDO. The Scientific Press, Palo Alto, California.
11. Thie, Paul RAM Introduction to Linear Programming and Game Theory (Second Edition). Jhon Wiley & Sons, N.Y., 1988.