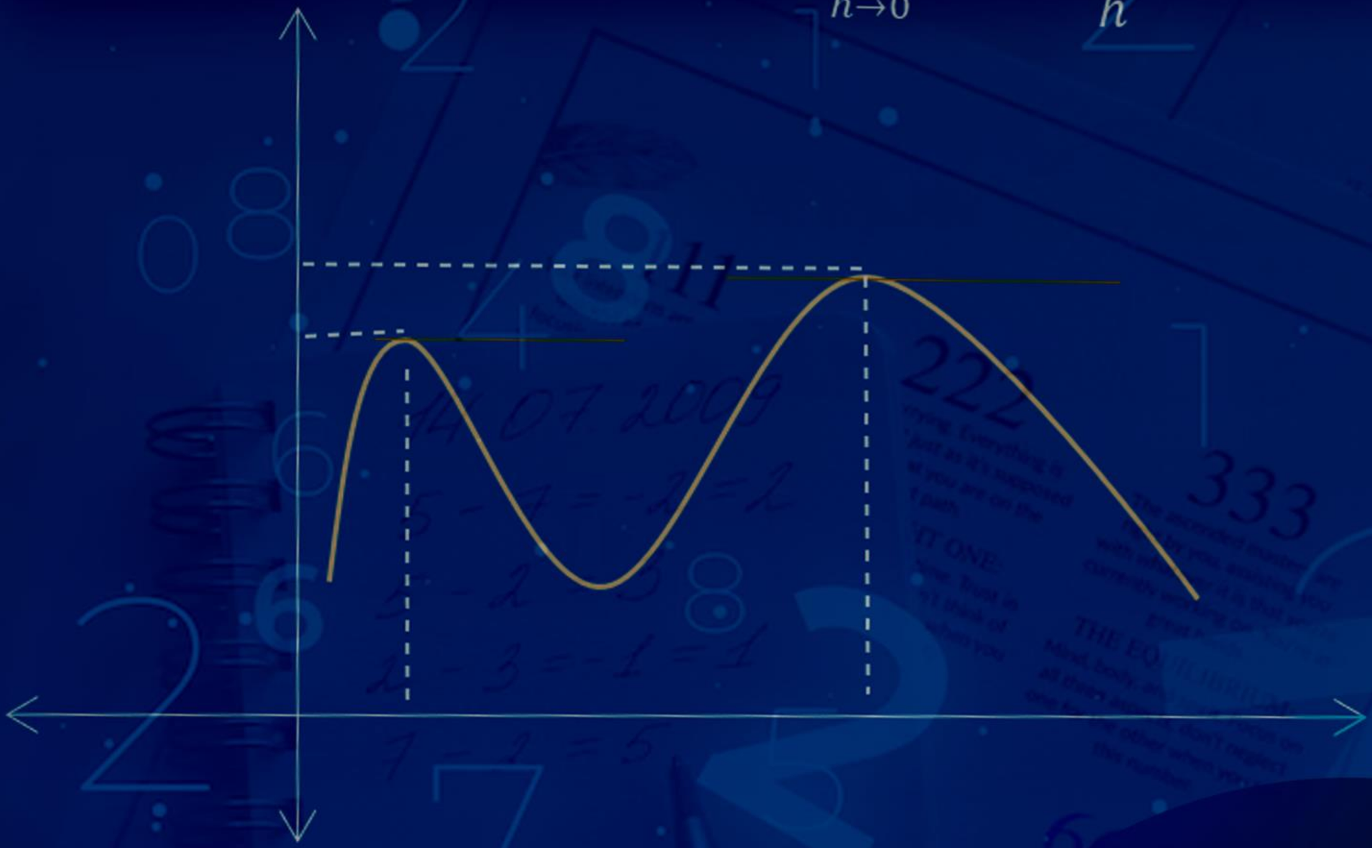
La Cantuta
Fondo Editorial
Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



LA DERIVADAS Y SUS APLICACIONES A LA ECONOMÍA Y LA ADMINISTRACIÓN

Gamaniel Domingo Gonzales Salvador
Luis Alvarado Jaramillo
José Enrique Tito Valenzuela
Narcio Felimon Vilcapoma Lara

fondoeditorial.une.edu.pe

Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle (UNE)

LA DERIVADAS Y SUS APLICACIONES A LA ECONOMÍA Y LA ADMINISTRACIÓN

Gamaniel Domingo Gonzales Salvador
Luis Alvarado Jaramillo
José Enrique Tito Valenzuela
Narcio Felimon Vilcapoma Lara

Lima – Perú

2024

LA DERIVADAS Y SUS APLICACIONES A LA ECONOMÍA Y LA ADMINISTRACIÓN

© **Gamaniel Domingo Gonzales Salvador**
https://orcid.org/0000-0002-9129-3800

Luis Alvarado Jaramillo
https://orcid.org/0000-0003-2396-0744

José Enrique Tito Valenzuela
https://orcid.org/0000-0002-3753-567X

Narcio Felimon Vilcapoma Lara
https://orcid.org/0000-0002-0894-0377

Editada por:

© Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle (UNE) **Fondo Editorial "La Cantuta"**
Dirección: Enrique Guzman y Valle N° 951, Lurigancho-Chosica 15472, Perú
ISNI: 0000 0000 8534 4267
fondoeditorial@une.edu.pe
Teléf. móvil: +51 999 140 920
Portal Web: https://www.une.edu.pe/

Primera edición digital: Febrero 2024
Libro digital disponible en: https://fondoeditorial.une.edu.pe/
Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú N°. 2024-00977
ISBN: 978-612-4148-60-6

DOI: https://doi.org/10.54942/lacantuta.45

Corrección de estilo: Luis Pablo Diaz Tito
luisp.diaz@upsjb.edu.pe / Tel. de contacto: +51 955 129 801

Diseño y Diagramación: Gráfica “imagen”
Manuel Enrique Sampen Antonio
sampen25@gmail.com / Tel. de contacto: +51 990 064 589

Revisión por pares ciegos aprobado por el **Consejo Editorial del Fondo Editorial “La Cantuta”.**

Libro resultado de Investigación y con revisión por pares doble ciego.
Sello editorial: Fondo Editorial (978-612-4148)

TABLA DE CONTENIDO

CAPÍTULO 1

1. La derivada definición
2. La derivada como razón de cambio

CAPÍTULO 2

3. Reglas de derivación
4. Ejercicios de aplicación con modelos de solución
5. Derivadas de funciones exponenciales
6. Interpretación geométrica de la derivada
7. Aplicaciones de la derivada a la economía
8. Aplicación de la derivada ala cálculo de limites
9. El teorema de hospital en aplicaciones de limites indeterminados
10. Criterio de la derivada y sus aplicaciones de máximo y mínimos
11. La aplicación de la derivada al problema de optimización
12. Aplicaciones de la derivada a la economía para hallar la función costo, función ingreso, análisis marginal etc.
13. Valores máximo y mínimo de una función
14. Bibliografías

Los autores.

CAPITULO 1

ANALISIS

DERIVADAS

Definición de derivada: La derivada de la función f en el punto x=a, llamada f prima de a se denota por f'(a), si existe, es el valor del limite:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Si f'(a) es un número real, la función f es derivable en x=a. Si f'(a) no es un número real o el límite no existe, la función f no es derivable en dicho punto.

Ejemplo: Calcular la derivada de f(x)=x^2 en x=2:

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(4 + 4h + h^2) - 4}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (h + 4) = 4$$

Tasa de variación media: Supongamos que un coche de fórmula uno se mueve en una carretera totalmente recta. A distintas distancias de la salida se registran los tiempos de paso, obteniéndose la siguiente tabla:

POSICIÓN	0	1.1	4.5	5.1	6.2	6.7
TIEMPO	0	2.2	9	11	12.4	13.4

En este caso, la posición y, se puede ver como una función f, que depende del tiempo x; es decir y=f(x).

La tasa de variación media de la posición en el intervalo de tiempo desde el instante 9 al instante 13.4 es:

$$\frac{f(13.4) - f(9)}{13.4 - 9} = \frac{6.7 - 4.5}{13.4 - 9} = 0.5$$

En general, la **tasa de variación media** de la función f en el intervalo [a;b] se define como el cociente:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

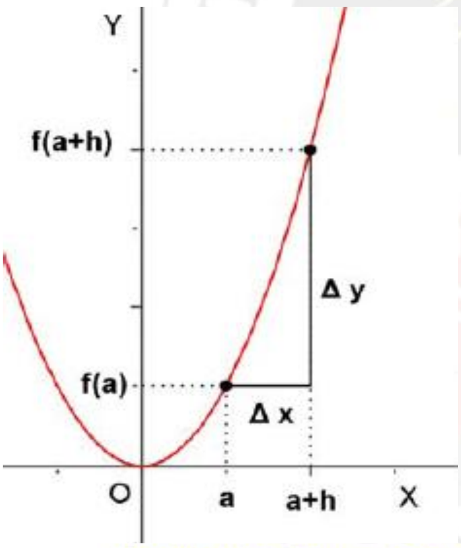
Esta tasa puede ser positiva (creciente), negativa (decreciente) o nula (constante).

La **tasa de variación instantánea** de la función f en el punto x=a se obtiene, haciendo tender el punto b al punto a, en la tasa de variación media de la función f en el intervalo [a;b]; por tanto, la tasa de variación instantánea de la función f en el punto x=a es:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Que es precisamente la derivada de la función f en el punto x=a. (en este límite consideramos b=a+h).

Utilizamos la derivada como la variación de una función en un punto concreto, o en un instante de tiempo, por eso se considera h como un incremento muy pequeño. Ejemplos de uso en el cálculo de la velocidad y de la aceleración instantáneas.



Función f(a). Derivada de la función f´(a).

TVM : tasa de variación media

Intervalo [a, a+h]

$$TVM = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

TVI : tasa de variación instantánea

Punto de abscisa x = a

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Ejemplos de derivadas aplicando la definición

Hallar la tasa de variación media de la función $f(x)=x^2+1$ en el intervalo [0;3] y la tasa de variación instantánea en el punto x=2.

Intervalo [a;a+h] luego $f(a+h)=f(3)=3^2+1=10$ y $f(a)=f(0)=0^2+1=1$

$$TVM = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \Rightarrow TVM = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3)-f(0)}{3-0} = \frac{10-1}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

Calculamos f(x+h) sumando h a las x y respetando el exponente de la variable.

$f(x+h)=(x+h)^2+1=x^2+2xh+h^2+1$, como nos piden en el punto x=2, podemos sustituir directamente.

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \Rightarrow f'(2) = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} \Rightarrow$$

$$f'(2) = \lim_{h\to 0}\frac{h^2+4h+5-5}{h} \Rightarrow f'(2) = \lim_{h\to 0}\frac{h^2+4h}{h} \Rightarrow f'(2) = \lim_{h\to 0}\frac{h(h+4)}{h} \Rightarrow f'(2) = \lim_{h\to 0}(h+4) = 4$$

Función derivada y derivadas sucesivas

Si f es una función derivable en el intervalo de números reales (a;b), la función derivada de f es la que a cada elemento x del intervalo (a;b) le hace corresponder la derivada de la función f en dicho punto. Esta función se designa por f'(x).

Una función f es derivable en el intervalo (a;b) si lo es en cada punto del intervalo.

Llamamos derivada de segundo orden de f a la función derivada de f', esta función se denota por f'', la función f''' es la derivada tercera de f y, en general, $f^{(n)}$ es la derivada n-ésima de f(x): $f^{(n)}$ es la función derivada de $f^{(n-1)}$.

Aplicando la fórmula de la derivada podemos calcular la derivada de cualquier función. Por comodidad utilizamos la siguiente tabla resumen de las derivadas de las funciones más usuales, que nos permite hacer lo mismo sin necesidad de recurrir a la definición en cada caso.

TABLA DE DERIVADAS

Tipo	Función simple		Función compuesta	
Constante	$f(x) = k$	$f'(x) = 0,\ k \in \mathbb{R}$		
Identidad	$f(x) = x$	$f'(x) = 1$		
Potencial	$f(x) = x^a$	$f'(x) = a \cdot x^{a-1}$	$f(x) = f^a$	$f'(x) = a \cdot f^{a-1} \cdot f'$
Irracional	$f(x) = \sqrt[n]{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$f(x) = \sqrt[n]{f}$	$f'(x) = \dfrac{f'}{n \cdot \sqrt[n]{f^{n-1}}}$
Exponencial	$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$f(x) = e^f$	$f'(x) = e^f \cdot f'$
	$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \cdot \ln a$	$f(x) = a^f$	$f'(x) = a^f \cdot f' \cdot \ln a$
Potencial exponencial	La derivamos como tipo potencial y le sumamos la derivada como exponencial. *** **Se suele hacer tomando logaritmos no se aplica esta fórmula.**		**Es una función f elevada a otra función g** $D\left[f^g\right] = \overbrace{g \cdot f^{g-1} \cdot f'}^{\text{Potencial}} + \overbrace{f^g \cdot g' \cdot \ln f}^{\text{Exponencial}}$ D quiere decir derivada	
Logarítmica	$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$	$f(x) = \ln f$	$f'(x) = \dfrac{f'}{f}$
	$f(x) = \lg_a x$	$f'(x) = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$	$f(x) = \lg_a f$	$f'(x) = \dfrac{f'}{f \cdot \ln a}$
		Trigonométricas		
Seno	$f(x) = \operatorname{sen} x$	$f'(x) = \cos x$	$f(x) = \operatorname{sen} f$	$f'(x) = \cos f \cdot f'$
Coseno	$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\operatorname{sen} x$	$f(x) = \cos f$	$f'(x) = -\operatorname{sen} f \cdot f'$
Tangente	$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$f(x) = \operatorname{tg} f$	$f'(x) = \left(1 + \operatorname{tg}^2 f\right) \cdot f' = \dfrac{f'}{\cos^2 f}$
Arco seno	$f(x) = \operatorname{arc\,sen} x$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$f(x) = \operatorname{arc\,sen} f$	$f'(x) = \dfrac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$
Arco coseno	$f(x) = \operatorname{arc\,cos} x$	$f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$f(x) = \operatorname{arc\,cos} f$	$f'(x) = \dfrac{-f'}{\sqrt{1-f^2}}$
Arco tangente	$f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$	$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$	$f(x) = \operatorname{arc\,tg} f$	$f'(x) = \dfrac{f'}{1+f^2}$

REGLAS DE DERIVACIÓN

Suma	$(f + g)' = f' + g'$	La derivada de una suma de dos funciones es la suma de las derivadas de estas funciones.
Resta	$(f - g)' = f' - g'$	La derivada de una diferencia de dos funciones es la diferencia de las derivadas de estas funciones.
Producto	$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$	La derivada del producto de dos funciones es igual a la derivada de la primera función por la segunda sin derivar más la primera función sin derivar por la derivada de la segunda.
Cociente	$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$	La derivada del cociente de dos funciones es igual a la derivada de numerador por el denominador sin derivar menos el numerador sin derivar por la derivada del denominador y, todo ello, dividido por el denominador sin derivar al cuadrado.
Producto por un número	$(a \cdot f)' = a \cdot f'$	La derivada del producto de un número real por una función es igual al número real por la derivada de la función.
Composición	$\left[g(f(x))\right]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$	Regla de la cadena

Ejemplos básicos de aplicación de la tabla:

Función constante: f(x)=k siendo k un número real, f'(x)=0

$$\Rightarrow f(x) = 5 \quad f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = -24 \quad f'(x) = 0$$

Función Identidad: f(x)=x ; f'(x)=1

Producto por una constante: (a f(x))'= a f'(x)

$$\Rightarrow f(x) = 8\,x \Rightarrow \begin{cases} a = 8 \\ f = x \to f' = 1 \end{cases} \quad f'(x) = 8 \cdot 1 = 8$$

Potencial simple: $f(x)=x^a$; $f'(x) = a\,x^{a-1}$

a) $f(x) = x^3 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow \quad f'(x) = \overbrace{3}^{a} \cdot x^{\overbrace{2}^{a-1}} \Rightarrow f'(x) = 3x^2$

b) $f(x) = 2\,x^4$

Aplicamos la Regla de la Cadena, desde la estructura más exterior a la más interior, obteniendo $f'(x)=8x^3$.

c) $f(x) = 2\,x^4 - x^3 + 8x + 5$

Como son sumas y restas de funciones, derivamos cada uno de los sumandos.

$$\begin{array}{llll} f(x) = 2x^4 \Rightarrow f'(x) = 8\,x^3 & f(x) = 8\,x \Rightarrow f'(x) = 8 & & \\ f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 & f(x) = 5 \Rightarrow f'(x) = 0 & & \end{array} \Rightarrow f'(x) = 8\,x^3 - 3x^2 + 8$$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$

Preparamos la función expresándola en forma de potencia.

$$f(x) = x^{-4} \Rightarrow f'(x) = \overbrace{-4}^{a} \cdot x^{\overbrace{-4-1}^{a-1}} \Rightarrow f'(x) = -4x^{-5} \Rightarrow f'(x) = -\frac{4}{x^5}$$

e) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

Como las raíces son potencias, podemos derivarla aplicando la fórmula de la derivada de una raíz o pasarlas a potencia y derivarlas como una potencia.

Como raíz

$$f(x) = \sqrt[n]{x} \quad f'(x) = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}} \qquad f(x) = \sqrt[3]{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^{3-1}}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Como potencia.

$$f(x) = x^{1/3} \Rightarrow f'(x) = \overbrace{1/3}^{a} \cdot x^{\overbrace{1/3-1}^{a-1}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3} \cdot x^{-2/3} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Derivadas de Funciones Compuestas

Tipo potencial $\Rightarrow$ $\boxed{f(x) = f^{a} \quad f'(x) = a \cdot f^{a-1} \cdot f'}$

a) $f(x) = \left(x^2+1\right)^3 \quad \Rightarrow$ **Solución:** $f'(x) = 6x \cdot \left(x^2+1\right)^2$

$$f(x) = \left(\underbrace{x^2+1}_{f}\right)^{\overset{a}{3}} \Rightarrow f'(x) = \overset{a}{3} \cdot \left(\underbrace{\left(x^2+1\right)}_{f}\right)^{\overset{a-1}{2}} \cdot f'?$$

$$\text{Calculamos } f'? \rightarrow f(x) = \underbrace{\left(x^2+1\right)}_{f} \rightarrow f'(x) = 2x$$

b) $f(x) = \dfrac{1}{\left(x^2+x+1\right)^5}$ $\qquad f'(x) = \dfrac{-5(2x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^6}$

Transformamos la función en

$$f(x) = \left(x^2+x+1\right)^{-5} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} f = \left(x^2+x+1\right) \rightarrow f' = 2x+1 \\ a = -5 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow f'(x) = -5\left(x^2+x+1\right)^{-6}.(2x+1) \quad \Rightarrow f'(x) = \frac{-5(2x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^6}$$

Tipo Irracional

$$f(x) = \sqrt[n]{f} \qquad f'(x) = \frac{f'}{n \cdot \sqrt[n]{f^{n-1}}}$$

$f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ $\qquad$ **Solución:** $f'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} \Rightarrow \begin{cases} f = x^2 \rightarrow f' = 2x \\ n = 3 \rightarrow n-1 = 2 \end{cases} f'(x) = \frac{2x}{3 \cdot \sqrt[3]{\left(x^2\right)^2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x}{3 \cdot \sqrt[3]{x^4}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x}{3 \cdot x\, \sqrt[3]{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

Tipo Exponencial

Base nº e $\Rightarrow$ $\boxed{f(x) = e^{f} \Rightarrow f'(x) = e^{f} \cdot f'}$

$$f(x) = e^{x^2+5}$$

$$f(x) = e^{x^2+5} \quad \Rightarrow f = x^2+5 \rightarrow f' = 2x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^{\overbrace{x^2+5}^{f}} \cdot \underbrace{2x}_{f'} \quad \Rightarrow f'(x) = e^{x^2+5} \cdot 2x$$

Base nº a $\Rightarrow$ $\boxed{\text{simple } f(x) = a^{x} \Rightarrow f'(x) = a^{x} \cdot \ln a \qquad \text{compuesta } f(x) = a^{f} \Rightarrow f'(x) = a^{f} \cdot f' \cdot \ln a}$

a) $f(x) = 3^x$ $\quad f(x) = 3^x \Rightarrow f'(x) = 3^x \cdot \ln 3$

b) $f(x) = 5^{(x^3+x)}$

$$f(x) = 5^{(x^3+x)} \Rightarrow \begin{cases} f = x^3 + x & \to f' = 3x^2 + 1 \\ a = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = 5^{(x^3+x)} \cdot (3x^2 + 1) \cdot \ln 5$$

Tipo Logarítmico

Neperianos $\Rightarrow$ $\boxed{f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{compuesta} \quad f(x) = \ln f \Rightarrow f'(x) = \frac{f'}{f}}$

$$f(x) = \ln(x^2 + 7) \Rightarrow f = x^2 + 7 \to f' = 2x \Rightarrow f'(x) = \frac{\overbrace{2x}^{f'}}{\underbrace{x^2+7}_{f}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x}{x^2+7}$$

Cualquier base:

$f(x) = \lg_a x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$ $\quad$ **compuesta** $\quad f(x) = \lg_a f \Rightarrow f'(x) = \frac{f'}{f \cdot \ln a}$

a) $f(x) = \lg_2 x$ $\quad f(x) = \lg_2 x \Rightarrow a = 2 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln 2}$

b) $f(x) = \lg_2(x^3 + 2x)$

$$f(x) = \lg_2(x^3 + 2x) \Rightarrow \begin{cases} f = x^3 + 2x \to f' = 3x^2 + 2 \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \frac{\overbrace{3x^2 + 2}^{f'}}{\underbrace{(x^3 + 2x)}_{f} \cdot \ln \underbrace{2}_{a}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2 + 2}{(x^3 + 2x) \cdot \ln 2}$$

Trigonométricas

Seno $\Rightarrow$ $\boxed{f(x) = \operatorname{sen} f \Rightarrow f'(x) = \cos f \cdot f'}$

f(x) = sen 5x $\quad \Rightarrow f(x) = \operatorname{sen} 5x \to f = 5x \to f' = 5 \Rightarrow f'(x) = \cos \underbrace{5x}_{f} \cdot \underbrace{5}_{f'} \Rightarrow f'(x) = 5 \cdot \cos 5x$

Coseno $\Rightarrow$ $\boxed{f(x) = \cos f \to f'(x) = -\operatorname{sen} f \cdot f'}$

f(x) = cos3x² $\Rightarrow f(x) = \cos 3x^2 \to f = 3x^2 \to f' = 6x \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{sen} \overbrace{3x^2}^{f} \cdot \overbrace{6x}^{f'} \Rightarrow f'(x) = -6x \cdot \operatorname{sen} 3x^2$

Tangente $\Rightarrow$ $\boxed{f(x) = \text{tg}\, f \;\rightarrow\; f'(x) = \left(1 + \text{tg}^2 f\right) \cdot f' = \dfrac{f'}{\cos^2 f}}$

a) $f(x) = \text{tg}\, 7x \quad \Rightarrow f(x) = \text{tg}\, 7x \rightarrow f = 7x \rightarrow f' = 7 \;\Rightarrow f'(x) = \left(1 + \text{tg}^2 7x\right) \cdot 7 \;\Rightarrow f'(x) = 7 \cdot \left(1 + \text{tg}^2 7x\right)$

b) $f(x) = \text{tg}(4x + 5) \quad \Rightarrow \quad f(x) = \text{tg}(4x+5) \rightarrow f = 4x + 5 \rightarrow f' = 4$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{4}{\cos^2(4x+5)}$$

Arco seno y arco coseno, sólo se diferencian en el signo de la derivada.

$$f(x) = \text{arc sen}\, f \rightarrow f'(x) = \frac{f'}{\sqrt{1 - f^2}} \qquad f(x) = \arccos f \rightarrow f'(x) = \frac{-f'}{\sqrt{1 - f^2}}$$

$f(x) = \text{arc sen}\, x^2 \Rightarrow f(x) = \text{arc sen}\, x^2 \rightarrow f = x^2 \rightarrow f' = 2x$

$$f'(x) = \frac{\overbrace{2x}^{f'}}{\sqrt{1 - \underbrace{\left(x^2\right)^2}_{f}}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1 - x^4}}$$

Arco Tangente

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = \text{arc tg}\, f \qquad f'(x) = \frac{f'}{1 + f^2}}$$

$f(x) = \text{arctg}\left(x^2 - 1\right) \quad \Rightarrow f(x) = \text{arctg}\left(x^2 - 1\right) \rightarrow f = x^2 - 1 \rightarrow f' = 2x$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\overbrace{2x}^{f'}}{1 + \underbrace{\left(x^2 - 1\right)^2}_{f}} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{2x}{1 + \left(x^2 - 1\right)^2}$$

Producto $\Rightarrow$ $\boxed{(f \cdot g) = f' \cdot g + f \cdot g'}$

a) $f(x) = x^5 \cdot \ln x$

$$f(x) = \overbrace{x^5}^{f} \cdot \underbrace{\ln x}_{g} \quad \Rightarrow \left|\begin{array}{l} f = x^5 \rightarrow f' = 5x^4 \\ g = \ln x \rightarrow g' = \dfrac{1}{x} \end{array}\right. \Rightarrow f'(x) = \overbrace{5x^4}^{f'} \cdot \underbrace{\ln x}_{g} + \overbrace{x^5}^{f} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'} \quad \Rightarrow f'(x) = 5x^4 \cdot \ln x + x^4$$

b) $f(x) = \text{sen}\, x \cdot e^x$

$$f(x) = \text{sen}\, x \cdot e^x \Rightarrow \left| \begin{array}{l} f = \text{sen}\, x \to f' = \cos x \\ g = e^x \to g' = e^x \end{array} \right. \Rightarrow f'(x) = \cos x \cdot e^x + \text{sen}\, x \cdot e^x \Rightarrow f'(x) = e^x(\cos x + \text{sen} x)$$

Cociente $\Rightarrow \boxed{\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}}$

a) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 2x}{x^2 + 2} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} f = 3x^2 - 2x \to f' = 6x - 2 \\ g = x^2 + 2 \to g' = 2x \end{array} \right.$

$$f'(x) = \frac{\overbrace{(6x-2)}^{f'}\overbrace{(x^2+2)}^{g} - \overbrace{(3x^2-2x)}^{f}\overbrace{(2x)}^{g'}}{\underbrace{(x^2+2)^2}_{g}} = \frac{6x^3 + 12x - 2x^2 - 4 - (6x^3 - 4x^2)}{(x^2+2)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x^2 + 12x - 4}{(x^2+2)^2}$$

b) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ $\qquad f(x) = \dfrac{\ln x}{x} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} f = \ln x \to f' = 1/x \\ g = x \to g' = 1 \end{array} \right. \Rightarrow f'(x) = \dfrac{(1/x)\cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$

Tipo potencial-exponencial, una función f elevada a otra función g, se resuelven tomando logaritmos neperianos y derivando los dos miembros de la expresión resultante. Escribimos y=f(x) para una mejor comprensión.

a) $f(x) = x^{\text{sen}x} \Rightarrow y = x^{\text{sen}x}$

Tomando logaritmos nos queda

$$\ln y = \ln x^{\text{sen}x}$$

El 2º miembro es el ln de una potencia.
Es igual al exponente por el ln de la base. $\Rightarrow \ln y = \text{sen}x \ln x$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} \ln y \to \dfrac{y'}{y} \\ \operatorname{sen}x \ln x \to \cos x \ln x + \operatorname{sen}x(1/x) \end{array} \right. \Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = \cos x \ln x + \frac{\operatorname{sen}x}{x}$$

Despejamos y´ $\Rightarrow \quad y' = (\cos x \ln x + (1/x)\operatorname{sen}x) \cdot y \quad \Rightarrow \quad y' = \left(\cos x \ln x + \dfrac{\operatorname{sen}x}{x} \right) x^{\operatorname{sen}x}$

b) $f(x) = x^x \Rightarrow y = x^x$

$$y = x^x \ \Rightarrow \ln y = x \ln x \ \Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \ \Rightarrow y' = (\ln x + 1) \cdot y \ \Rightarrow y' = (\ln x + 1) \cdot x^x \Rightarrow y' = x^x \cdot (\ln x + 1)$$

Composición $\Rightarrow \boxed{[g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)}$

a) $f(x) = \ln(\operatorname{sen}x)$ Logarítmica $f(x) = \ln \overbrace{\operatorname{sen}x}^{f} \to f'(x) = \dfrac{f'}{f} \to f = \operatorname{sen}x \to f' = \cos x \ \Rightarrow f'(x) = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}x}$

b) $f(x) = \operatorname{sen}(\ln x)$ Seno $f(x) = \operatorname{sen} \overbrace{\ln x}^{f} \ \to f'(x) = \cos f \cdot f' \to f = \ln x \to f' = \dfrac{1}{x} \ \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x} \cos \ln x$

c) $f(x) = \ln(\ln x^2)$ Solución : $f'(x) = \dfrac{2}{x \ln x^2}$

d) $f(x) = \ln(\ln(\ln(\ln x)))$ solución $f'(x) = \dfrac{1}{x \ln x (\ln(\ln x))(\ln(\ln(\ln x)))}$

Ejemplo: Calculemos la derivada de h(x) = cos (x^2) , donde la función h es la composición de dos funciones:

$$\begin{cases} f(x) = x^2 \\ g(x) = \cos(x) \end{cases}$$

Es decir h(x) = g(f(x)). Para derivar h(x) utilizamos la regla de la cadena h'(x)=g'(f(x))f'(x)

Como

$$\begin{cases} f'(x) = 2x \\ g'(x) = -\operatorname{sen}(x) \end{cases}$$

se tiene que h'(x)= -sen (f(x)) 2x = -sen(x^2)2x

Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \operatorname{sen} x^2$ $\Rightarrow f´(x) = 2x \cos x^2$ (seno)

b) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ $\Rightarrow f´(x) = 2\operatorname{sen}x \cdot \cos x$ (potencial)

c) $f(x) = (3x^2 - 2)^5$ $\Rightarrow f´(x) = 30x\ (3x^2 - 2)^4$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 3}$ $\Rightarrow f´(x) = \dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-3)^2}}$

e) $f(x) = e^{3x+2}$ $\Rightarrow f´(x) = 3 \cdot e^{3x+2}$

f) $\log_3 (4x + 1)$ $\Rightarrow f´(x) = \dfrac{4}{(4x+1).\ln 3}$

g) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$ 3 $\Rightarrow f´(x) = = \dfrac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x}}$

h) $f(x) = \operatorname{sen}^2 (2x^3 + 2x)$ $.f´(x) = 2 \cdot \left[\operatorname{sen}(2x^3+2x)\right] \cdot \cos\ (2x^3+2x) \cdot \left(6x^2 + 2\right)$

Halla las funciones derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{1}{7x+1} \Rightarrow f´(x) = \dfrac{0 \cdot (7x+1) - 1 \cdot 7}{(7x+1)^2} \Rightarrow f´(x) = -\dfrac{7}{(7x+1)^2}$

b) $f(x) = x^{2/3} \Rightarrow f´(x) = \dfrac{2}{3}\, x^{\frac{2}{3}-1} \Rightarrow f´(x) = \dfrac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow f´(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

c) $f(x) = x^2 \cdot x^{\frac{1}{3}}$ $f(x) = x^{\frac{7}{3}} \Rightarrow f´(x) = \dfrac{7}{3} x^{\frac{7}{3}-1} \Rightarrow f´(x) = \dfrac{7}{3} x^{\frac{4}{3}} \Rightarrow f´(x) = \dfrac{7\sqrt[3]{x^4}}{3}$

d) $f(x) = \left(x - \sqrt{1-x^2}\right)^2 \Rightarrow f´(x) = 2\left(x - \sqrt{1-x^2}\right)\left(1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right) \Rightarrow f´(x) = 2\left(x - \sqrt{1-x^2}\right)\left(1 + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

e) $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{x^2} \Rightarrow f´(x) = \dfrac{\left(2x \cdot e^{2x}\right) \cdot x^2 - \left(e^{2x} \cdot 2x\right)}{x^4} \Rightarrow f´(x) = \dfrac{2 \cdot e^{2x} \cdot (x^2 - 1)}{x^3}$

f) $f(x) = x\cos 2x \Rightarrow f´(x) = 1.\cos 2x + x(-\operatorname{sen}2x)2 \Rightarrow f´(x) = \cos 2x - 2\operatorname{sen}2x$

g) $f(x) = \ln \cos x \Rightarrow f´(x) = \dfrac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}$ $f´(x) = -\operatorname{tg} x$

h) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

CAPITULO 2

LA DERIVADA

Definición.

La derivada de una función f es la función denotada por y prima (y ´), o por f prima

(f ´)es la derivada de y con respecto a x, la derivada de la función f con respecto a x. Notaciones. La primera derivada de la función f con respecto a x se denota como:

f ´ $y´, f´, \frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}, D_x f(x), D_x y$ y se define por $f´(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

y cuyo dominio consta de todos los valores de x en los que existe tal límite.

Razón media de cambio de "y" con respecto a "x":

Si tenemos la función y = f(x). Todo cambio en la variable independiente "x" produce un cambio en la variable dependiente "y". Así, si x cambia del valor " x" a $x_1 + \Delta x$, entonces "y" cambia de $f(x_1)$ .Asi el cambio en "y" que podemos denotar como Δy es $f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$, cuando el cambio en x es Δx .

El promedio de la razón de cambio de "y" por unidad de cambio en "x", cuando "x" cambia de x_1 a $x_1 + \Delta x$,es: $\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Así en general, tenemos: Cambio en x: $\Delta x = (x + \Delta x) - x$

Cambio en y: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

$$\frac{Cambio\ en\ y}{Cambio\ en\ x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

RAZON INSTANTANEA DE CAMBIO DE "y" CON RESPECTO A "x":

Si existe el límite de $\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$ cuando Δx se aproxima a cero, lo cual denotamos como $\lim_{x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$; este límite es lo que recibe el nombre de razón instantánea de cambio de "y" por unidad de cambio de "x".

Definición.

Si y = f(x), la razón de cambio instantánea de "y" por unidad de cambio de "x" es la derivada de "y" con respecto a x , denotada f´(x), si ésta existe.

Definición.

Si y = f(x), la razón de cambio instantánea de "y" por unidad de cambio de "x" en x_1 es la derivada de "y" con respecto a x en x_1, denotada por $f\,'(x_1)$, si ésta existe en $x = x_1$.

Se llama derivación al proceso de encontrar la derivada f ´ de una función f.

REGLAS DE DERIVACION

1. **Regla de la constante:** Si c es una constante y F(x)= c entonces

$$F'(x)= 0 \quad ó \quad D_x[c]= 0$$

2. **Regla de la potencia entera**
   Si n es un entero positivo y $F(x)= x^n$, entonces

$$F'(x)= n\,x^{n-1} \quad ó \quad D_x[x^n]= n\,x^{n-1}$$

En palabras

a) La derivada de una constante es cero

b) La derivada de una potencia entera, es el producto del exponente por la base con el exponente original disminuido en 1.

Supóngase que c es una constante y que f ´(x) y g'(x) existen.

3. **Regla del múltiple constante**

Si F(x)= c f(x), entonces $F'(x)= c\ f'(x)$ ó $D_x[\,c\,f(x)]= c\,D_x f(x)$

4. **Regla de la suma**

Si F(x)= f(x) + g(x), entonces

$F'(x)= f'(x) + g'(x)$, ó $D_x\,[f'(x) + g'(x)]= D_x f(x) + D_x\,g(x)$

5. **Regla de la resta**

Si F(x)= f(x) - g(x) entonces,

$F(x)= f'(x) - g'(x)$ ó $D_x\,[f'(x) - g'(x)]= D_x f(x) - D_x\,g(x)$

6. **Regla del producto**

Si F(x)= f(x) • g(x) entonces,

$F'(x)= f'(x) \bullet g(x) + f(x) \bullet g'(x)$, ó $D_x\,[f(x) \bullet g(x)]= [D_x f(x)] \bullet g(x) + f(x) \bullet [D_x\,g(x)]$

7. **Regla del cociente**

Si $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ entonces,

$$F(x) = \frac{f''(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} \quad ó \quad D_x[f(x) \cdot g(x)] = \frac{[D_x f(x)] \cdot g(x) - f(x) \cdot [D_x(g(x)]}{g^2(x)}$$

8. Regla de la cadena

Si g'(x) y f'(g(x)) existen y F es la función compuesta definida por F(x)=f(g(x)), entonces F'(x) existe y esta dada por

$$F'(x) = [f'(g(x))] \cdot g'(x)$$

En notación de Leibniz, si y = f(u) y u=g(x) son funciones derivables, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

En palabras

La derivada de una función compuesta es igual a la derivada de la función externa (evaluada en la función interna) multiplicada por la derivada de la función interna.

9. Regla general de las potencias

Sea n un entero positivo

Si existe y $y = [u(x)]^n$, entonces $y' = n[u(x)]^{n-1}\ u'$

10. Regla de la potencia entera

Si p es un número entero cualquiera y $f(x) = x^p$ entonces: $f'(x) = p\,x^{p-1}$

11. Regla de la potencia racional generalizada

Si f ' (x) existe y $h(x) = \left(f(x)\right)^{\frac{p}{q}}$, entonces $h'(x) = \dfrac{p}{q}\left(f(x)\right)^{\frac{p}{q}-1}\ f'(x)$)

Ejercicios

Encuentre las derivadas de las siguientes funciones:

1. $f(x)= 5 + 6x^2 + 7x$ **Rta** $f´(x) = 12x + 7$

2. $f(x) = \dfrac{3x}{x-1}$ **Rta** $f´(x) = \dfrac{-3}{(x-1)^2}$

3. $f(x) = 3\sqrt{4-x^2}$ **Rta** $f´(x) = \dfrac{-3x}{\sqrt{4-x^2}}$

4. $f(x) = 3\left(3-\dfrac{1}{2}x^2\right)^2$ **Rta** $f´(x) = 6\left(3-\dfrac{1}{2}x^2\right)(-x)$

5. $f(x) = 3(x+2)^{\frac{4}{3}}$ **Rta** $f´(x) = 4\sqrt[3]{x+2}$

6. $f(x) = 5(2x-4)^{\frac{4}{3}}(5x+6)^{\frac{2}{3}}$

Rta $f´(x) = \left(\dfrac{40}{3}\right)(2x-4)^{\frac{1}{3}}(5x+6)^{\frac{2}{3}} + \dfrac{50}{3}(5x+6)^{-\frac{1}{3}}(2x-4)^{\frac{4}{3}}$

7. $f(x) = \dfrac{3x+1}{3x^2+2}$

Rta $f´(x) = \dfrac{3(3x^2+2)-6x(3x+1)}{(3x^2+2)^2} = \dfrac{9x^2+6-18x^2-6x}{(3x^2+2)^2} = \dfrac{-9x^2-6x+6}{(3x^2+2)^2}$

8. $f´(1)$ si $f(x) = \dfrac{2x^3+4}{x^2-4x+1}$ **Rta** $f´(1) = 0$

9. $f´(2)$ si $f(x) = \left(\dfrac{2x+1}{3x-1}\right)^4$ **Rta** $f´(2) = -\dfrac{4}{5}$

10. $f´(3)$ si $f(x) = \sqrt{2x^3-4x+5}$ **Rta** $f´(3) = \dfrac{25}{\sqrt{47}} = 3.6466$

DERIVADAS DE FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS

Sea $u = f(x)$, tenemos que:

1) $y = \ln u$ entonces $y' = \dfrac{u'}{u}$

2) $y = \log_a(u)$, entonces $y' = \dfrac{1}{\ln a}\left(\dfrac{u'}{u}\right)$

3) $y = e^u$ entonces $y' = e^u\,(u')$

4) $y = a^u$ entonces $y' = (\ln a)\; a^u(u')$

Ejemplos. Hallar y´ dado:

1) $y = e^{-3x^2}$ **Rta** $y' = -6\,x\,e^{-3x^2}$

2) $y = \dfrac{e^{2x}}{x^2}$ **Rta** $y' = \dfrac{2\,x^2 e^{2x} - 2\,x\,e^{2x}}{x^4}$

3) $y = x^4\;\ln 3x^2$ **Rta** $y' = 4\,x^3\;\ln\left(3x^2\right) + 2\,x^3$

INTERPRETACION GEOMETRICA DE LA DERIVADA.

La palabra tangente se deriva del vocablo tangens, cuyo significado es “que toca”, luego la tangente a una curva es una línea recta que toca la curva.

Definición.

La primera derivada de la función y = f(x) evaluada en el punto P(x_1 , y_1), es igual a la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la ecuación y = f(x) en el punto

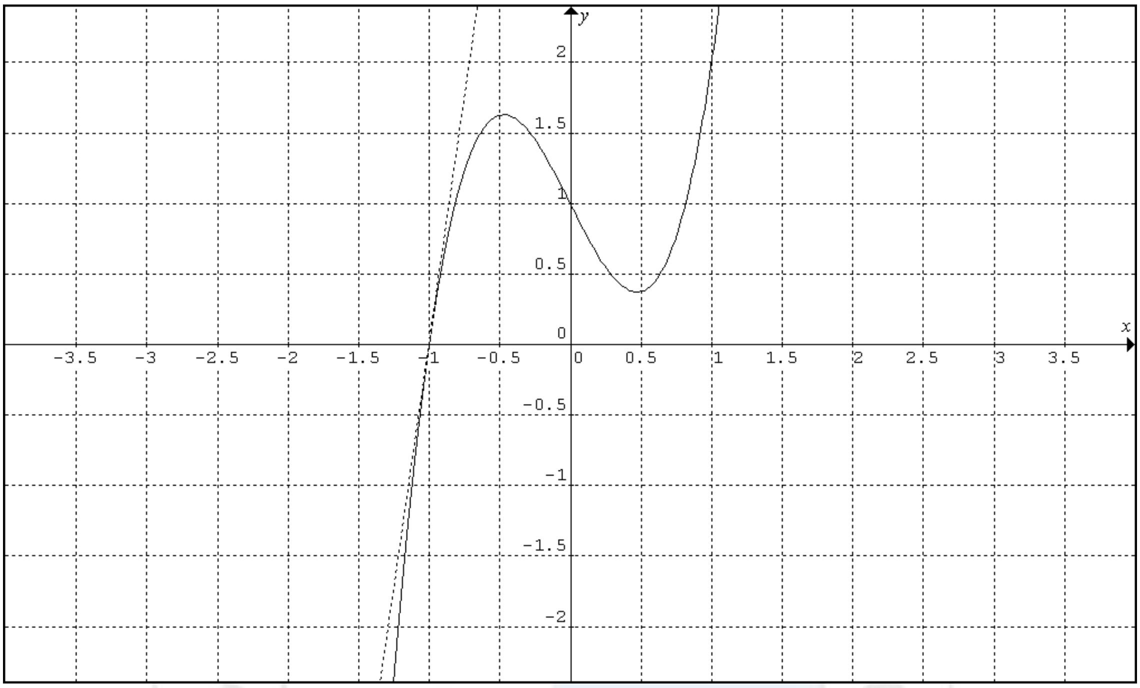
P(x_1 , y_1).

Utilizando la ecuación punto pendiente de la ecuación de una recta, podemos escribir la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la ecuación y = f(x) en el punto P(x_1 , y_1), como

$y - y_1 = f'(x_1)\,(x - x_1)$.

A la gráfica de la función $y = 3x^3 - 2x + 1$, la cual se muestra a continuación, se le ha trazado una recta tangente en el punto en el cual $x = -1$. La pendiente de dicha recta es igual a la primera derivada evaluada en x=-1. Es decir si $y' = 9x^2 - 2$. La pendiente de dicha recta es igual a

$m = 9(-1)^2 - 2 = 7$. Ecuación de la recta tangente



Ejercicios.

1. Encuentre la pendiente (m)de la recta tangente a la curva $y = x^2 - 4x + 3$ en el punto en el cual $x = 2$. Grafique la curva correspondiente.

Rta m $= 0$ Observe que en $x = 2$ la recta tangente a $y = x^2 - 4x + 3$ es horizontal.

2.Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = e^{-x}$ en el punto en el cual x = 1

Rta y - 0.3678 = - 0.3678 (x – 1)

y = - 0.3678 x + 0.7356

Aplicaciones de la derivada: un enfoque para estudiantes de Economía.

"La era de la caballería ha terminado; ha llegado la de los sofistas, los economistas y los matemáticos".

Edmund Burke

Resumen:

Uno de los grupos temáticos de la Matemática Superior que más se aplica a la Economía es, sin duda, la derivada. Es utilizada para determinar el producto marginal, elasticidad e importantes funciones económicas, y para desarrollar los procesos de optimización. Tanto el óptimo microeconómico del consumidor como del productor, representan un problema de optimización modelado mediante un proceso en derivadas parciales. Este documento ilustra algunas de las aplicaciones de la derivada de las funciones de una variable independiente, con énfasis en las aplicaciones económicas.

Palabras claves: derivada, optimización, curvas.

Summary:

One of the thematic clusters of Mathematics for higher education more applied to Economics is undoubtly the derivative. It is used to determine the marginal product, elasticities of important economic functions, and to develop optimization processes. Both, the optimum micro-consumer and producer, represent a process modeled by partial derivatives. This paper illustrates some applications of the derivative of functions in one independent variable, with an emphasis on economic applications.

Keywords: derivative, optimization, curves.

Introducción:

La Matemática como ciencia ha proporcionado al hombre las más poderosas herramientas para enfrentar los más disímiles problemas de la cotidianidad. La mayoría de los campos del saber humano se valen de técnicas matemáticas para indagar en la explicación de relaciones causales de los procesos y fenómenos que ocurren en cada especialidad. Hoy en día resulta frecuente encontrarnos artículos de las ciencias médicas, químico-farmacéuticas, ciencias sociales (o de cualquier área general del saber), en que se haga referencia a algún concepto o ente matemático. Especialmente en las ciencias económicas son utilizados conceptos como la derivada, la integral, las ecuaciones diferenciales, las series temporales, entre otros. Los métodos más modernos de medición de la eficiencia y la optimización económica tienen como sustrato esencial algún modelo matemático.

Probablemente uno de los conceptos más útiles y aplicables en la Economía sea *la derivada* de una función. Cualquier curso de matemática superior contiene, ineludiblemente, un tema dedicado especialmente a las *aplicaciones de la derivada*. Generalmente se acostumbra presentar el estudio, de acuerdo al área específica del conocimiento desde donde se aborde la temática, en dos partes. De una, la utilización de la derivada en la obtención de soluciones estrictamente matemáticas; a saber: el cálculo de límites indeterminados y el trazado general de curvas. De otra, las aplicaciones específicas en la especialidad de que se trate. El objetivo de este trabajo es **ilustrar las aplicaciones generales de la derivada**, con la intención de que este escrito sea utilizado por estudiantes de Economía. Se estructura en tres apartados: el primero, dedicado a la resolución de límites indeterminados; el segundo, al trazado de curvas; y por último, la resolución de problemas económicos de optimización.

Toda aplicación formalizada de la ciencia tiene su nacimiento en un problema de la práctica objetiva. Probablemente uno de los más bonitos y útiles ejemplos de utilización de la optimización se puede encontrar en el siguiente suceso de la segunda mitad del siglo XX[1]:

En febrero de 1953 se produjo en Holanda la inundación más importante de su historia. Los diques que protegían el país fueron arrasados y murieron más de 1800 personas. Los daños se cifraron en el 7 % del Producto Interno Bruto de aquel año. Se creó una comisión de investigación sobre los hechos y sobre cómo prevenir desastres semejantes en el futuro. La reconstrucción de los diques de tal forma que la seguridad fuera total, requería desembolsos astronómicos, y podía no ser factible. El problema real era, entonces, lograr una especie de equilibrio, entre costos y seguridad: diques más altos eran más costosos, pero reducían las posibilidades de futuras inundaciones. Por tanto, la comisión se enfrentó al problema de seleccionar la *altura óptima* de los diques. Estos tipos de equilibrios son centrales en economía. Conducen a problemas de optimización de un tipo que el análisis matemático maneja de forma natural. En este capítulo ilustraremos cómo resolver este tipo de problemas económicos.

I. APLICACIÓN DE LA DERIVADA AL CÁLCULO DE LÍMITES

Los límites de formas indeterminadas que no pueden resolverse mediante la factorización, generalmente se resuelven por la conocida en la matemática como *Regla de L´Hôpital*, que contiene en su estructura el concepto de derivada.

Teorema de L´Hôpital

Supongamos que las funciones f y g están definidas y son derivables en cierto entorno de a. Si $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, y $g(x) \neq 0$ en cierto entorno de a, entonces, si existe $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (finito o infinito), existe también $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, y se cumple que: $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

La Regla de L´Hôpital también es válida en el caso que las funciones f y g no están definidas en a, pero $\lim_{x\to a} f(x) =$ 0 y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$.

1

Si $f'(a)=g'(a)=0$, y $f'(x)$ y $g'(x)$ satisfacen las condiciones puestas sobre las funciones f y g, podemos aplicar la Regla de L´Hôpital a $\frac{f'(c)}{g'(c)}$, y obtenemos: $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ = $\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}$; aplicar sucesivamente.

Ejemplo 1:

Calcular:

a) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{x-sen\,x}{x^3}$

c) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+2}{x^3-4x^2+3}$

Solución:

a) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$

En este caso estamos ante la indeterminación $\frac{0}{0}$, pues $\lim_{x\to 1}(x^2-1+\ln x)=1^2-1+0=0$,

y $\lim_{x\to 1}(e^x-e)=e^1-e=0$

Resolvemos aplicando la Regla de L´Hôpital:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1+\ln x)'}{(e^x-e)'}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+\frac{1}{x}}{e^x}=\frac{3}{e}$$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{x-sen\,x}{x^3}$ = $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$ aplicando L Hopital $\lim_{x\to 0}\frac{-(-sen\,x)}{6x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}=\frac{1}{6}$

c) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+2}{x^3-4x^2+3}$ aplicando L Hopital $\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-6x}{3x^2-8x}=\frac{3-6}{3-8}=\frac{3}{5}$

Ejemplo 2:

Hallar: $\lim_{x\to\infty} \dfrac{sen\dfrac{4}{x}}{\dfrac{1}{x}}$

Solución:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{sen\dfrac{4}{x}}{\dfrac{1}{x}} =$$

derivando por L

Hospital $\lim_{x\to\infty} \dfrac{-\dfrac{4}{x^2}.\cos\dfrac{4}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}} =$ $\lim_{x\to\infty}(4\cos\dfrac{4}{x}) =$ $4\lim_{x\to\infty}(\cos\dfrac{4}{x}) = 4.1 = 4$

Cálculo de límites de la forma $\dfrac{\infty}{\infty}$

El teorema anterior es válido si se sustituye la exigencia de $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ por $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$, y se llama, por extensión, Regla de L´Hôpital.

Ejemplo 3:

Hallar:

a) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}$ (Se le llama límite cuando x tiende a cero por la derecha)

b) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{e^x}$ (Se le llama límite cundo x tiende a más infinito)

Solución:

a) En este caso estamos ante la indeterminación $\dfrac{\infty}{\infty}$, pues,

$\lim_{x\to 0^+} \ln x = +\infty$, y $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$.

Resolvemos aplicando la Regla de L´Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^2}{x} = 0$$

b) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x} = 0$

Existen otras formas indeterminadas, $0.\infty$; $\infty-\infty$, que pueden transformarse en las formas $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$, y aplicar la Regla de L´Hôpital.

Si queremos calcular $\lim_{x\to a} f(x).g(x)$ y, $\lim_{x\to a} f(x)=0$ y $\lim_{x\to a} g(x)=\infty$, entonces,

$f(x).g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$, y por tanto, $\lim_{x\to a} f(x).g(x) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$, y ahora es de la forma $\frac{0}{0}$.

Además, $f(x).g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$, y es un límite de la forma $\frac{\infty}{\infty}$.

En dependencia del límite que se esté calculando, se hará una u otra de las transformaciones anteriores, siguiendo el criterio que la aplicación de la Regla de L´ Hôpital simplifique el proceso de determinación del límite.

Ejemplo 4:

Calcular:

a) $\lim_{x\to 0} x^2 \ln x^2$

b) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$

Solución:

Observemos que $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$, y $\lim_{x\to 0}\ln x^2 = -\infty$ Luego, estamos ante una indeterminación del tipo $0.\infty$. Transformando,

$\lim\limits_{x\to 0} x^2 \ln x^2 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x^2}{\dfrac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{2x}{x^2}}{-\dfrac{2x}{x^4}} = \lim\limits_{x\to 0} - x^2 = 0$

Observe que $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \ln x^2 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\dfrac{1}{\ln x^2}}$, pero esta transformación es menos recomendable en este caso en particular, pues la derivada de $\dfrac{1}{\ln x^2}$ es mucho más compleja que, simplemente, la derivada de $\ln x^2$.

b) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$

No existe una forma única de proceder para resolver indeterminaciones del tipo $\infty-\infty$. En este caso, se debe efectuar la resta:

$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\ln x-(x-1)}{(x-1)\ln x}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\ln x - x+1)}{(x-1)\ln x}\right)$ Aquí podemos observar que: $\lim\limits_{x\to 1}(\ln x - x+1)=0$, y $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\ln x = 0$ Luego, la indeterminación $\infty-\infty$ se ha transformado en una del tipo $\dfrac{0}{0}$. Basta entonces resolver $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\ln x - x+1}{(x-1)\ln x}\right)$

$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\ln x - x+1}{(x-1)\ln x}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\dfrac{1}{x}-1}{1.\ln x+(x-1).\dfrac{1}{x}}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{-\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{x-(x-1)}{x^2}}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{-\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{x+1}{x^2}}\right) =$
$\lim\limits_{x\to 1}\left(-\dfrac{1}{x+1}\right) = -\dfrac{1}{2}$.

II. ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO DE FUNCIONES

Examinar el comportamiento de una función es una parte básica de las Matemáticas y tiene aplicaciones en muchas áreas de estudio. Cuando esbozamos una curva colocando simplemente puntos, no puede dar información suficiente acerca de su forma.

Ejemplo: La función $y=(x+1)^3(x-1)$ pasa por los puntos (-1; 0), (0; -1) y (1; 0). Observemos que los siguientes gráficos lo cumplen, pero solo el representado en la figura 1, es $f(x)$.

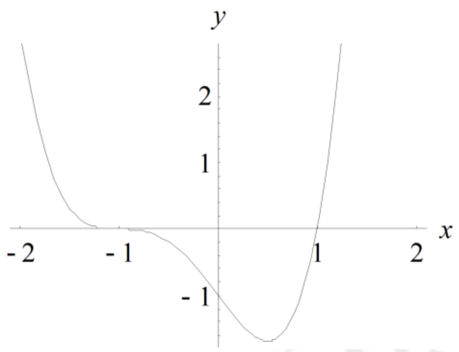


Figura 1

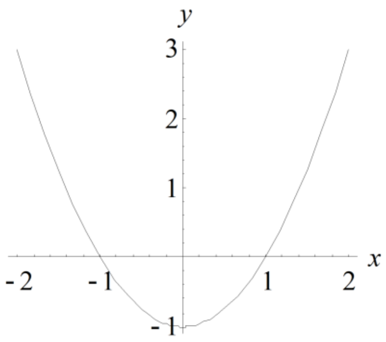


Figura 2

Por esto, se ha desarrollado todo un procedimiento basado en conceptos del análisis matemático, para acercarse a la forma de una función.

Una función puede tener más de un punto de máximo y/o de mínimo. (Véase la figura 3).

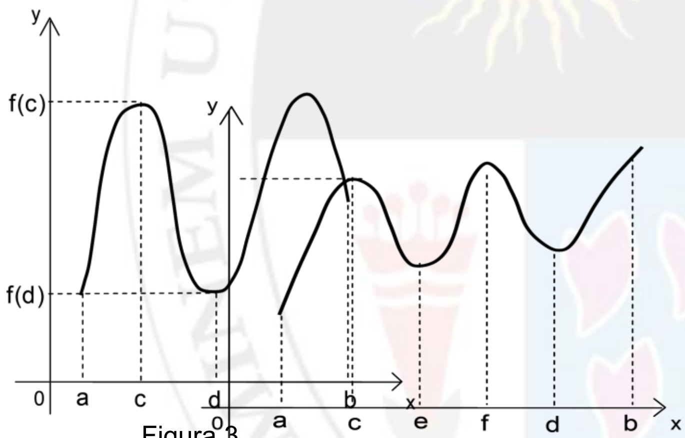


Figura 3

Figura 4

Los valores extremos pueden ser interiores o extremos del intervalo.

En la figura 4, c y d no son máximo y mínimo, respectivamente, en [a, b], pero sí en una vecindad.

Definición de Máximo Relativo o local (Mínimo relativo o local)

Un punto x_0 es un punto de *máximo local (mínimo local)* de la función f, si existe δ >0 tal que: $f(x) \leq f(x_0)\left(f(x) \geq f(x_0)\right)$ para todo x tal que $|x - x_0| < \delta$.

Recuerde que: $(x_0 - \delta; x_0 + \delta) = |x - x_0| < \delta$

El valor de $f(x_0)$ recibe el nombre de *valor máximo relativo* de la función o *(valor mínimo relativo).*

Los valores máximos y mínimos se llaman *extremos* de la función.

Condición necesaria para la existencia de extremos

Teorema de Fermat

Sea f una función y c un punto de extremo local de f. Entonces, si f es derivable en c, $f'(c)$ = 0.

Luego, si f es derivable en c, una *condición necesaria* para que c sea extremo local, es $f'(c)$ = 0.

Pero puede suceder:

- que no exista la primera derivada de una función en algún punto, y este no constituya un punto de extremo. Por ejemplo, $f(x) = \sqrt[3]{x}$.
- que no exista la primera derivada de una función en algún punto, y este sea un punto de extremo. Por ejemplo, $f(x) = |x|$.
- que una función no sea derivable en un punto, y este constituya un punto de extremo.

Puntos críticos o estacionarios: los valores c tales que $f'(c)$ = 0.

Puntos singulares: puntos en los que la derivada no existe, pero sí la función.

Condiciones suficientes para la existencia de extremos

Criterio de la primera derivada:

se basa en el signo de la primera derivada.

Analizamos el signo de la primera derivada por la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en una vecindad de x_0. (Véanse las figuras 5 y 6).

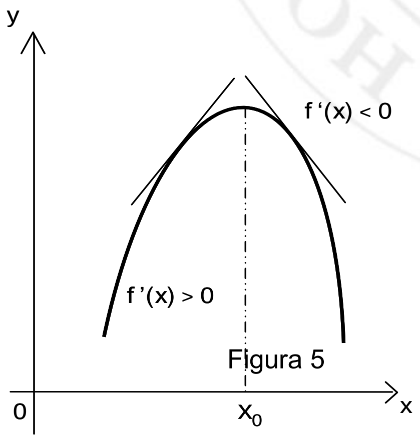


Figura 5

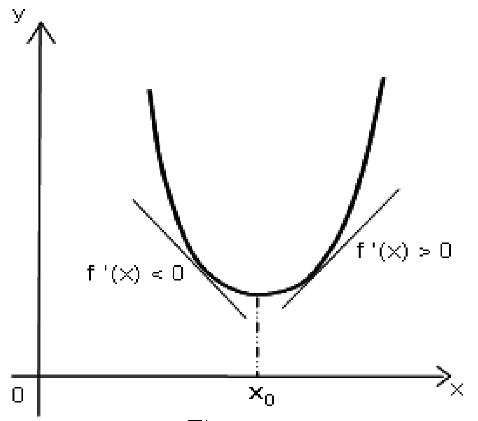


Figura 6

Teorema (Criterio de la Primera derivada)

Sea f continua en $V_\delta(x_0)$ = [$x_0 - \delta, x_0 + \delta$] = [a, b] y derivable en $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ = (a, b), y supongamos que $x_0 \in$ (a, b) es un punto crítico o estacionario. Entonces:

1. Si $f'(x) \geq 0$ para $(x_0 - \delta, x_0)$ y $f'(x) \leq 0$ para $(x_0, x_0 + \delta)$, entonces x_0 es un punto de *máximo local* de f.

2. Si $f'(x) \leq 0$ para $(x_0 - \delta, x_0)$ y $f'(x) \geq 0$ para $(x_0, x_0 + \delta)$, entonces x_0 es un punto de *mínimo local* de f.

3. Si $f'(x)$ no cambia de signo en $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, entonces x_0 no es un punto de extremo local de la función.

Ejemplo resuelto 5:

Determinar los extremos de: $f(x)$ = $x^3 - 3x$.

Solución:

Hacemos $f'(x) = 0$

$f'(x) = 3x^2 - 3 \quad \Rightarrow \quad 3(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow$ x = 1 ó x = -1

En la cercanía x = 1, si x < 1, $f'(x)$ < 0, y si x > 1, $f'(x)$ > 0. Luego, x = 1, punto de mínimo local.

Si un punto de abscisa es de mínimo, tiene asociado un valor ordenado, o valor de f correspondiente, al que llamamos *valor mínimo*. Si es de máximo, le llamamos *valor máximo.*

En este caso en particular, el valor mínimo se obtiene encontrando el valor de $f(1)$.

$f(1)$ = $1^3 - 3.1$= 1 – 3 = -2, valor mínimo.

En la cercanía x = -1, si x < -1, $f'(x)$ > 0, y si x > -1, $f'(x)$ < 0, luego, x = 1, punto de máximo local.

f (-1) = $(-1)^3$ – 3(-1) = -1 + 3 = 2, valor máximo.

Criterios para funciones crecientes o decrecientes

Sea f derivable en el intervalo (a, b). Si $f'(x)$ >0 para toda x en (a, b), entonces f es creciente en (a, b). Si $f'(x)$ < 0, entonces f es decreciente en el intervalo.

Ejemplo 6:

Analice la monotonía de una función que tiene como primera derivada: $f'(x) = 3x^2 - 3$.

Solución:

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$3x^2 - 3 > 0$

$3(x^2 - 1) = 0$

(x -1)(x +1) = 0

x = 1 ó x = -1

Figura 7

Luego, f es creciente en ($-\infty$; -1) y (1; $+\infty$), y decreciente en (-1; 1). Representemos en la recta numérica los valores críticos. (Véase figura 7). Verifique los signos de la primera derivada.

Ejemplo 7:

Determine los extremos relativos de las siguientes funciones y analizar la monotonía en todo su dominio.

a) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$

b) $f(x)$ = $x^2 . e^x$

Solución:

a) $f'(x) = \dfrac{2}{3.\sqrt[3]{x}}$

Hallar los extremos relativos de la función, implica encontrar los cambios de signo de $f'(x)$ en el dominio de f. Este proceso es similar al de resolución de inecuaciones fraccionarias. Encontramos los ceros del numerador y del denominador de la primera derivada de f :

2 $\neq$ 0 Luego, el numerador nunca toma valor cero.

$3.\sqrt[3]{x}$ = 0 $\Rightarrow$ x = 0 Observe que $f'(0)$ no está definida, pero $f(0)$ sí lo está. Luego, x = 0 es un valor crítico, y no hay ningún otro. Podemos determinar los cambios de signo de $f'(x)$, colocando los signos de esta derivada alrededor de los puntos críticos. (Figura 8).

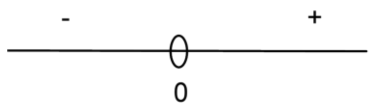


Figura 8 4.16

Recuerde que $f(x)$ es creciente donde $f'(x)$ es positiva, y decreciente, donde $f'(x)$ es negativa.

Así, observe que:

Si x < 0, $f'(x)$ < 0, luego, en ese intervalo f es decreciente.

Si x > 0, $f'(x)$ > 0, luego, en ese intervalo f es creciente.

Como hay un cambio de signo de la primera derivada, alrededor del punto x = 0, de negativo a positivo, este es un punto de mínimo relativo. Además, porque f está definida en x = 0.

f (0) = $0^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{0^2}$ = 0. Luego, el punto (par ordenado) donde existe un mínimo, es (0; 0).

b) $f(x)$ = x^2e^x

$f'(x)$ = $xe^x(x+2)$

$f'(x)$ = 0 $\Rightarrow xe^x(x+2)$ = 0 $\Rightarrow$ x = 0 ó x = -2

Cuando la función no es racional, como es el caso de $y = x^2e^x$, se usará una tabla para determinar los signos de la función en los diferentes intervalos de su dominio. La tabla, en este caso, consiste en determinar los signos de $y = x^2e^x$, en correspondencia con los signos de x, e^x y $x+2$ en los intervalos $(-\infty,-2)$, $(-2,0)$ y $(0,+\infty)$. De acuerdo con el ejemplo que desarrollamos, tenemos:

	$(-\infty,-2)$	(-2,0)	(0, $+\infty$)
x	-	-	+
e^x	+	+	+
$x+2$	-	+	+
	+	-	+

Podemos notar que f es creciente en (-∞; -2) y (0; +∞), y decreciente en: (-2; 0).

Alrededor de x = -2 hay un cambio de signo de la primera derivada, de positivo a negativo, por lo que este es un punto de máximo relativo.

Alrededor de x = 0 hay un cambio de signo de la primera derivada, de negativo a positivo, por lo que este es un punto de mínimo relativo.

La primera derivada proporciona mucha información útil para el análisis de funciones, sin embargo, para conocer la verdadera forma de una curva necesitamos más información.

Ejemplo: $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) =$ 2x $\Rightarrow$ x = 0 es valor crítico. Si x < 0, $f'(x)$ < 0, y si x > 0, $f'(x)$ > 0.

Notemos que las curvas representadas en las figuras 9 y 10 satisfacen las condiciones anteriores, pero, ¿qué gráfica describe verdaderamente la función?

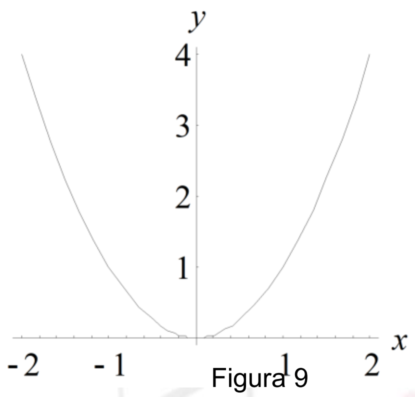


Figura 9

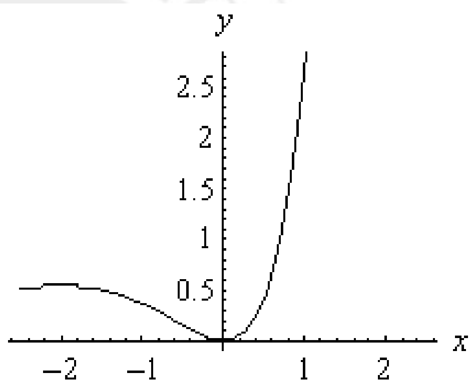


Figura 10

Esta pregunta se contesta fácilmente usando la segunda derivada y la noción de concavidad, que vienen a completar el análisis del comportamiento de una función.

Concavidad de una función

En las figuras 11 y 12, observe que cada curva $y = f(x)$ se "flexiona" (o abre) hacia arriba.

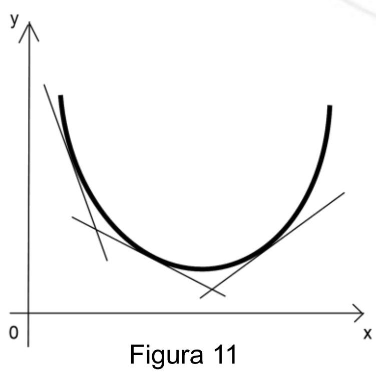


Figura 11

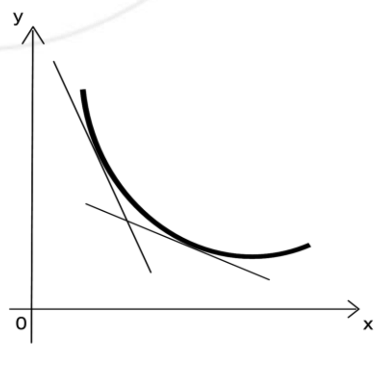


Figura 12

Si se trazan tangentes a las curvas, las curvas quedarán "por arriba" de estas. Además, las pendientes de las líneas tangentes crecen en valor al crecer x. Luego, f' es una función creciente. Se dice entonces que la función es *cóncava hacia arriba.*

Si la curvas se encuentran "por debajo" de las tangentes, se flexionan hacia abajo. (Véanse los gráficos de las figuras 13 y 14).

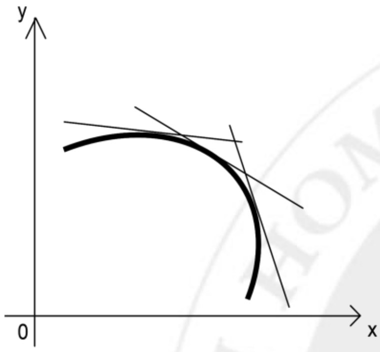


Figura 13

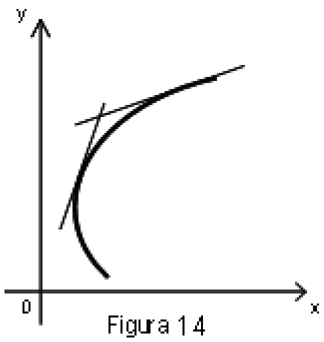


Figura 14

Cuando x crece, las pendientes decrecen, luego, f' es una función decreciente. Decimos que f es *cóncava hacia abajo.*

Definición:

Sea f derivable sobre (a, b). Se dice que f es cóncava hacia arriba (cóncava hacia abajo) sobre (a, b), si f' es creciente (decreciente) sobre (a, b).

Criterio de concavidad

Sea f' derivable en (a, b). Si $f''(x) > 0$ para toda $x \in$ (a, b), entonces f es cóncava hacia arriba en (a, b).

Si $f''(x) < 0$ para toda $x \in$ (a, b), entonces f es cóncava abajo en (a, b).

La noción de concavidad nos permite reconocer la curva que verdaderamente se corresponde con la función dada ($y = x^2$). (Recordar las figuras 9 y 10). Si determinamos la concavidad de la función $y = x^2$, nos percatamos de que la curva que se corresponde con esta función es la representada en la figura 9, pues cumple que: $f''(x) > 0$ para todo $x \in Dom\, f$, luego es cóncava hacia arriba en todo su dominio.

Ejemplo 8:

Analizar la concavidad de la función $f(x) = x^3$.

Solución:

a) $f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f''(x) = 6x$

$f''(x) < 0$ para x < 0 y $f''(x) > 0$ para x > 0. Luego, si x < 0, f es cóncava hacia abajo; si x > 0, f es cóncava hacia arriba. Compruebe este resultado en la gráfica de la figura 15.

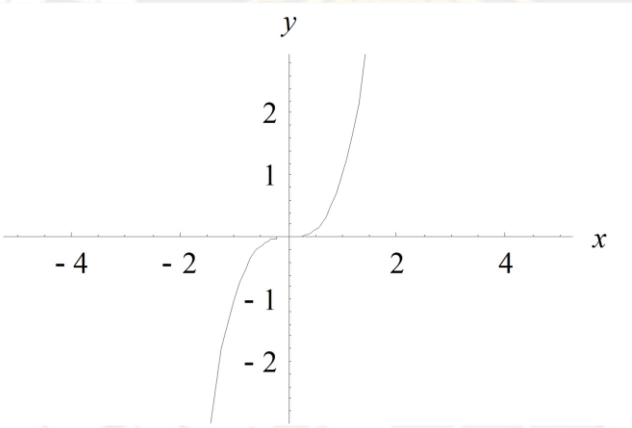


Figura 15

Punto de inflexión

Definición:

Una función tiene un punto de inflexión en x = x_0 si y solo si, f es continua en x_0 y f cambia de concavidad en x_0.

Entonces, x_0 es un posible punto de inflexión si:

1. $f''(x_0) = 0$; o no existe $f''(x_0)$, pero sí $f(x_0)$.

2. f debe ser continua en ese punto.

Ejemplo 9:

Analizar la concavidad y encontrar los puntos de inflexión de $f(x) = 6x^4 - 8x^3 + 1$.

Solución:

$f'(x) = 24x^3 - 24x^2 = 24(x^3 - x^2) \Rightarrow$ $f''(x) =$ $24(3x^2 - 2x)$ = 24x (3x -2) Luego, $f''(x) = 0$ en x = 0, y en x = $\frac{2}{3}$, que son posibles puntos de inflexión.

Se procede de forma análoga a la solución de una inecuación, como lo hemos visto anteriormente. Ubiquemos los signos en un rayo numérico para observar los cambios de signo de la segunda derivada. (Figura 16).

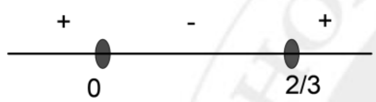


Figura 16

En (-∞; 0) f es cóncava hacia arriba, al igual que en ($\frac{2}{3}$; +∞), pues en estos intervalos f'' es positiva. En (0; $\frac{2}{3}$) f es cóncava hacia abajo, pues f'' es negativa.

Luego, x = 0 y x = $\frac{2}{3}$ son puntos de inflexión, pues hay cambio de signo de la segunda derivada alrededor de estos puntos. **Recuerda que son puntos de inflexión**, si f es continua en esos puntos y existe cambio de signo de la segunda derivada alrededor de estos ellos. Verifique este resultado en la figura 17.

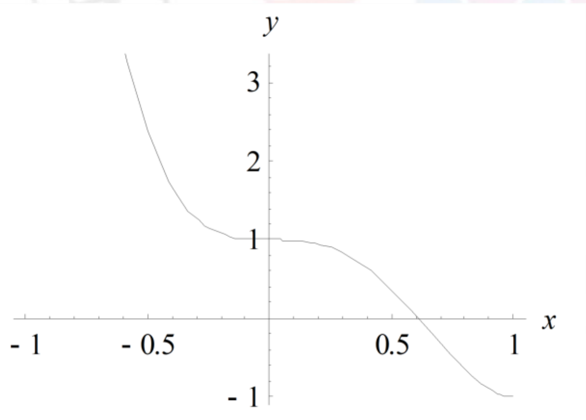


Figura 17

Criterio de la segunda derivada para la existencia de puntos extremos

Si $f'(x_0) = 0$, y $f''(x_0)$ < 0, entonces f tiene máximo relativo en x_0.

Si $f'(x_0) = 0$, y $f''(x_0)$ > 0, entonces f tiene mínimo relativo en x_0.

Ejemplo 10:

Verifique la existencia de extremos de la función $f(x) = 2x^2 - 4x$, considerando los criterios de la primera y segunda derivadas.

Solución:

$f(x) = 2x^2 - 4x \Rightarrow f'(x) = 4x - 4$

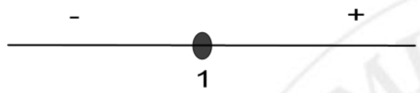


Figura 18

$f'(x) < 0$ para x < 1 y $f'(x) > 0$ para x > 1.

Luego, x = 1 es punto de mínimo. (Véase figura 18).

Comprobemos que x = 1 es punto de mínimo, si se verifica que $f''(1) > 0$.

$f''(x) = 4 > 0$ para todo x del dominio de f, por lo que se verifica la existencia de un mínimo en x = 1.

Las asíntotas en el comportamiento de una función

Para completar el análisis del comportamiento de una función, resulta muy necesaria la comprensión de los conceptos de asíntotas verticales y no verticales. Estudiemos la existencia de asíntotas en el gráfico de una función.

En el análisis del comportamiento de una función son importantes los casos en que la gráfica de la función se aproxima indefinidamente a una recta, cuando la variable independiente se acerca a un punto o cuando crece o decrece indefinidamente.

Definición de asíntota

Dada una función f, se dice que la recta L es una asíntota de $y = f(x)$ si cuando un punto P(x, y) se desplaza continuamente por $y = f(x)$, de tal forma que x ó y tienda a +◎ ó -◎, la distancia entre P(x, y) y la recta L tiende a cero.

A continuación se muestran gráficas de funciones que tienen asíntotas. (Están representadas en las figuras 19-22).

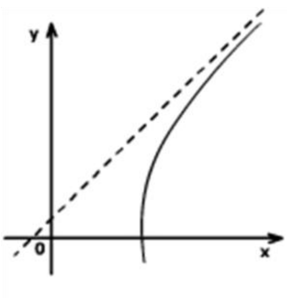


Figura 19

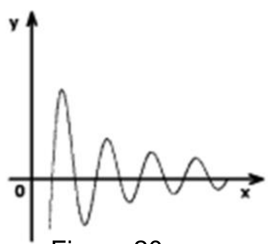


Figura 20

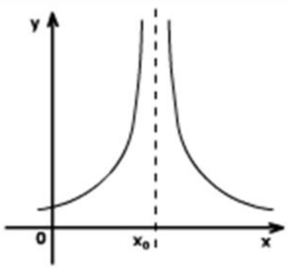


Figura 21

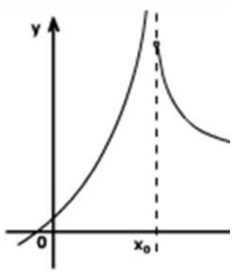


Figura 22

Las asíntotas las clasificamos en verticales (o sea perpendiculares al eje x) y oblicuas, o sea, no verticales.

Asíntotas verticales

Se muestra a continuación los gráficos de funciones que presentan asíntotas verticales, en las figuras 23 ; 24 y 25.

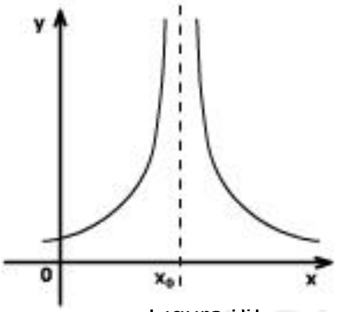


Figura 23

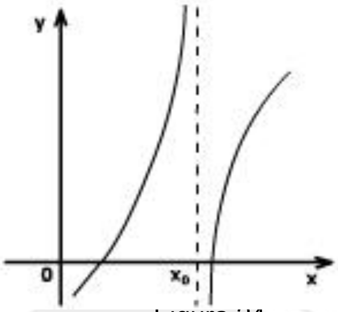


Figura 24

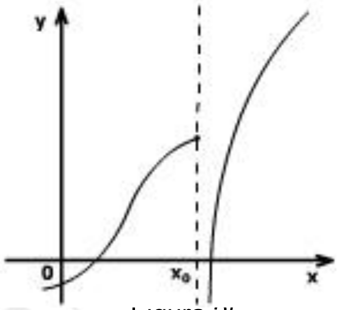


Figura 25

Como se observa, la distancia entre un punto P(x, y) de $y = f(x)$ y la recta x = x_0, se hace cada vez más pequeña cuando x es próximo a x_0, si y solo si uno de los límites laterales en x_0 de f es +◎ ó -◎.

Definición de asíntota vertical

La recta x = x_0 es una *asíntota vertical* de la curva de una función continua $y = f(x)$ si al menos uno de los límites laterales en x_0 de f es +◎ ó -◎.

Para determinar si la recta x = x_0 es asíntota vertical, se debe encontrar los puntos en los cuales la función $y = f(x)$ es discontinua y analizar los límites laterales en dichos puntos.

Ejemplos:

1. $y = \dfrac{1}{x}$; es discontinua en 0, se cumple que: $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$ Luego, la recta x = 0 es una asíntota vertical de la función $y = \dfrac{1}{x}$, y la gráfica de la función alrededor de la recta x = 0 toma la forma que se muestra en la figura 26.

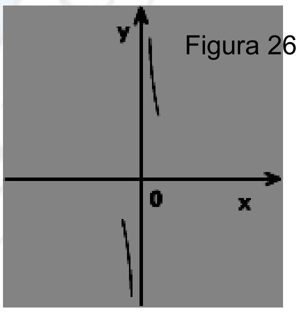


Figura 26

2. $y = \dfrac{1}{x-2}$ es discontinua en 2; se cumple que:

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$$

Luego la recta x = 2 es una asíntota vertical de la función $y = \frac{1}{x-2}$, y la gráfica de la función tomará alrededor de la recta x = 2, la forma de la figura 27

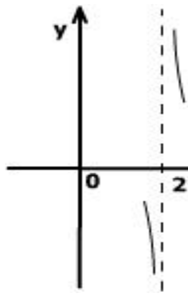


Figura 27

3. $f(x) = \frac{x}{(x+1)(x-3)^2}$ no es continua en –1 y 3; se cumple que :

- Para x = –1,

$\lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$

- Para x = 3,

$\lim_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \to 3^-} f(x) = +\infty$

Luego las rectas x = -1 y x = 3 son asíntotas verticales de la función $y = f(x)$, y la gráfica de la función tomará alrededor de las rectas x = -1 y x = 3, la forma que se muestra en la figura 28.

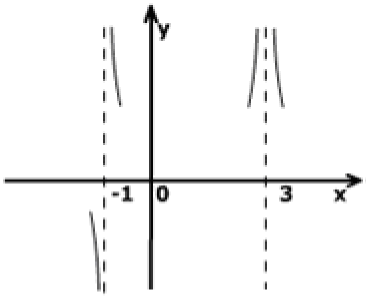


Figura 28

Definición de asíntota oblicua

Se dice que la recta $y = mx + n$ es una *asíntota oblicua* de $y = f(x)$ si se cumple que: 28

$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$ es la pendiente de la recta oblicua (lógicamente es un valor finito), y $n = \lim_{x \to \infty} (f(x) - mx)$ es el intercepto de la recta con el eje de las Y.

Observe un ejemplo en la figura 29.

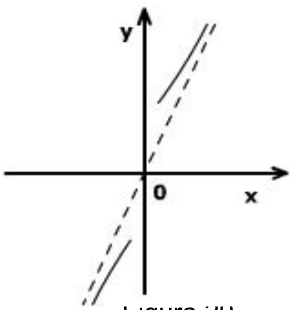


Figura 29

Cuando ocurre que m = 0, y n existe, la asíntota no vertical es *horizontal,* por lo que la recta $y = mx + n$ se convierte en $y = n$. En estos casos, n es el punto o valor de Y, donde la función tiene una asíntota horizontal, y como $m = 0$, $n = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

Ejemplo 11:

Sea $f(x) = 4x + \dfrac{1}{x+1}$. Analizar si tiene asíntota oblicua.

Solución:

Investiguemos si existen m y n.

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(4 + \frac{1}{x(x+1)}\right) = 4$$

$$n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty}\left(4x + \frac{1}{x+1} - 4x\right) = 0$$

Luego y = 4x es una asíntota oblicua.

Ejemplo 12:

Aproximarse al gráfico de la función $f(x) = \dfrac{1}{x-5}$.

Solución:

Dominio: $\mathbb{R}\setminus\{5\}$

Intercepto con los ejes coordenados:

Eje de las x: 1 $\neq$ 0 No tiene intercepto con el eje x.

Eje de las y: si x = 0, y = $\dfrac{1}{0-5} = -\dfrac{1}{5}$ Luego, (0; - $\dfrac{1}{5}$)

Asíntotas:

Asíntotas verticales:

Si existen, es en los puntos que anulan el denominador de f.

$$\lim_{x\to 5^+} \frac{1}{x-5} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 5^-} \frac{1}{x-5} = -\infty$$

Luego, x = 5 es asíntota vertical.

Asíntotas No verticales:

$y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x-5}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2-5x} = 0$$

Luego, si la pendiente, m, es igual a cero, y existe n, hay una asíntota horizontal, porque no existe inclinación alguna de dicha recta con respecto al eje de las X. Así, $y = mx + n$ se transforma en $y = n$. Luego, si existe, ¿en qué punto n se verifica la asíntota horizontal? Basta calcular: n = $\lim_{x\to\infty}(f(x) - mx)$, que en este caso en particular porque $m = 0$, se calcula, $\lim_{x\to\infty} f(x)$ = $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-5} = 0$ Luego, $y = 0$ es una asíntota horizontal.

Extremos y monotonía:

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-5)^2}$$

$f'(x) \neq 0$ para toda x $\in Dom\ f$. Luego, no hay extremos.

Observe que $f'(x)$ < 0 para todo el dominio de f, pues el término del denominador siempre será positivo porque está elevado al cuadrado, y el signo negativo delante de la expresión, cambia el signo de $f'(x)$.

Comprobemos:

$-\frac{1}{(x-5)^2} > 0 \Rightarrow \frac{1}{(x-5)^2} < 0$.

Ubiquemos los ceros del denominador de esta expresión en un rayo numérico. (Figura 30).

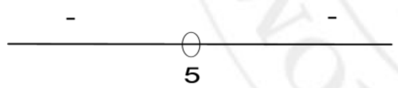


Figura 30

Note que no hay cambio de signo porque x = 5 es un cero doble, y se comienza con signo negativo pues se está indicando que la expresión sea < 0. Luego, f es decreciente en todo su dominio, porque $f'(x)$ es negativa en todo punto.

Puntos de inflexión y concavidad:

$$f''(x) = -\frac{-2(x-5)}{(x-5)^4} = \frac{2}{(x-5)^3}$$

$f''(x) \neq 0$ para toda x $\in Dom\ f$. No tiene puntos de inflexión.

$\frac{2}{(x-5)^3} > 0$; $(x - 5)^3 = 0 \Rightarrow$ x = 5 Solución triple.

Observe que, si x > 5, $f''(x)$ > 0, luego, f es cóncava hacia arriba en dicho intervalo. Si x < 5, $f''(x)$ < 0, luego, f es cóncava hacia abajo. (Véase la figura 31).

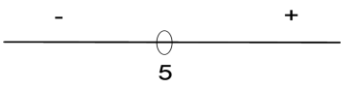


Figura 31

Note que, aunque exista cambio de signo de la segunda derivada alrededor de x = 5, este no es punto de inflexión, porque no pertenece al dominio de la función. Este punto es de discontinuidad de f. Observe el gráfico de la función en la figura 32.

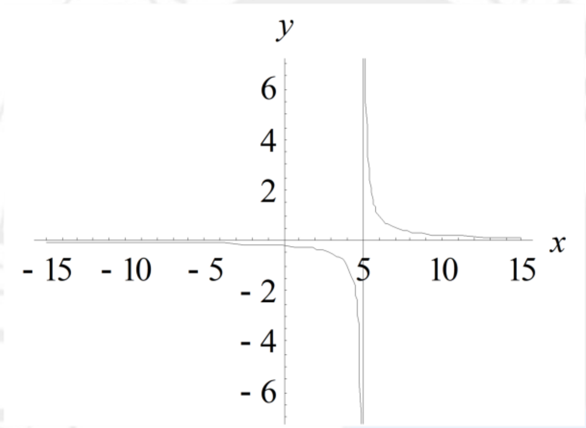


Figura 32

Ejemplo 13:

Trazar la gráfica de la función $y = \dfrac{x^2}{1-x}$.

Solución:

Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

Intercepto con los ejes coordenados:

Eje de las x: $\dfrac{x^2}{1-x} = 0$ $\Rightarrow$ $x^2 = 0$ $\Rightarrow$ x = 0. Luego, (0; 0)

Eje de las y: Si x = 0, y = 0 Luego, (0; 0)

Asíntotas:

Asíntotas Verticales:

$\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2}{1-x} = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2}{1-x} = -\infty$. Luego, x = 1 es una asíntota vertical.

Asíntotas no verticales:

$y = mx + n$

$m = \lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\dfrac{\frac{x^2}{1-x}}{x} = \lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x-x^2} = -1$ Luego, si existe n, f tiene una asíntota oblicua.

$n = \lim_{x\to\infty}(f(x)-mx) = \lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{1-x}+x\right) = \lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x(1-x)}{1-x} = \lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x-x^2}{1-x} =$

$= \lim_{x\to\infty}\dfrac{x}{1-x} = -1$ Luego, y = -x -1 es una asíntota oblicua.

Extremos y monotonía:

$$f'(x) = \frac{(1-x)2x-x^2(-1)}{(1-x)^2} = \frac{2x-2x^2+x^2}{(1-x)^2} = \frac{2x-x^2}{(1-x)^2} = \frac{x(2-x)}{(1-x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x(2-x)}{(1-x)^2}$$

Ceros del numerador y del denominador:

x(2 –x) = 0 $\Rightarrow$ x = 0 ó x = 2

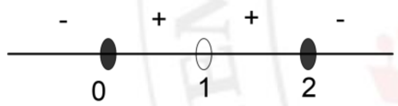


Figura 33

$(1-x)^2 = 0 \Rightarrow$ x = 1 Observe los cambios de signo de $f'(x)$ en la figura 33.

f es monótona creciente en (0; 1) y en (1; 2)

f es monótona decreciente en (-∞; 0) y en (2 +∞)

Luego, en x = 0 hay un mínimo local, y en x = 2 un máximo.

$f(0) = \dfrac{0^2}{1-0} = 0$ Valor mínimo; $f(2) = \dfrac{2^2}{1-2} = -4$ Valor máximo.

Puntos de inflexión y concavidad:

$$f''(x) = \frac{(1-x)^2(2-2x)-(2x-x^2).2(1-x).(-1)}{(1-x)^4} = \frac{2(1-x)^3+(2x-x^2).2.(1-x)}{(1-x)^4} =$$

$$\frac{2-4x+2x^2+4x-2x^2}{(1-x)^3}.$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$f''(x) \neq 0$ para todo x$\in$ $Domf$. Luego, no hay puntos de inflexión.

$(1-x)^3 = 0 \Rightarrow$ x = 1

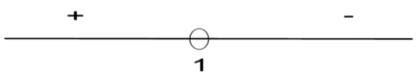
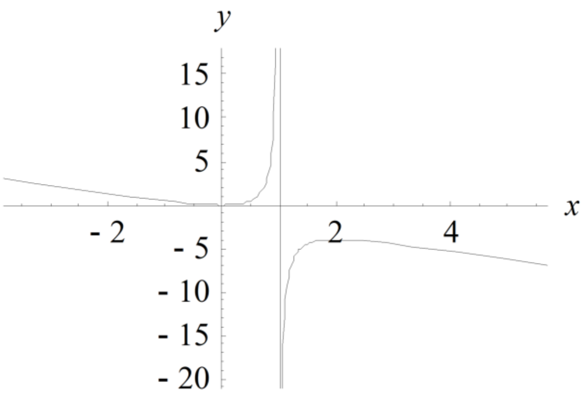


Figura 34

Como $f''(x) > 0$ para todo x < 1, luego, f es cóncava hacia arriba para (-∞ ; 1)

Como $f''(x) < 0$ para todo x > 1, luego, f es cóncava hacia abajo para (1; +∞). (Véanse los signos de $f''(x)$ en la figura 34). Compruebe los resultados obtenidos en este análisis del comportamiento de la curva, en la gráfica de la

figura 35.



III. APLICACIÓN DE LA DERIVADA A PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Muchos de los problemas que se presentan en la práctica diariamente, están relacionados de una forma u otra, con encontrar los valores máximos y mínimos de una función, y más aún, determinar para qué valores de la variable independiente se alcanzan estos. Estos problemas se llaman, en general, *problemas de optimización.*

En términos generales, un problema de optimización consiste en encontrar el valor mínimo o minimizar, o encontrar el valor máximo o maximizar, una cierta función, de tal forma que satisfagan ciertas condiciones dadas.

La solución o soluciones óptimas son aquellas para las cuales se satisfacen las restricciones del problema y el valor de la función sea mínimo o máximo.

La función que representa el problema de optimización se le llama *función objetivo.*

Fases en la solución de un problema de Optimización

1. Planteamiento del problema

2. Formulación Matemática (construir la función objetivo si no se da explícitamente)

3. Análisis del comportamiento de la función objetivo (puede incluir su representación gráfica)

4. Obtención de las soluciones

Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 14:

Una empresa tiene la siguiente función de producción: Q = $-\frac{2}{3}L^3 + 10L^2$, donde L representa el número de horas de trabajo aprovechadas por la empresa diariamente, y Q el número de quintales obtenidos de un determinado producto agrícola.

a) Halle el valor de L para el cual el producto total es máximo. Halle el producto total máximo.

b) Haga el gráfico de esta función.

c) Haga en un gráfico debajo del anterior, las funciones de producto marginal y producto medio.

d) ¿Qué conclusiones saca usted de estos gráficos?

Solución:

a) Q' = - $\frac{2}{3}$. 3L^2 + 10. 2L

Q' = -2L^2+ 20L

Q'' = -4L +20

-2L^2+ 20L = 0

L^2 -10L = 0

L(L -10) = 0

L = 0 ó L = 10

Q''(0) = 20 > 0, luego, L = 0 es punto de mínimo.

Q''(10) = -4.10+20 = -20 < 0 Luego, L = 10 es punto de máximo.

Q (10) = - $\frac{2}{3}$ $(10)^3$ +10. $(10)^2$ = - $\frac{2}{3}$ .1000 +1000 = 333,3

El valor de L es 10, y el producto total máximo es aproximadamente 333. Luego, si la empresa labora 10 horas diarias, obtiene su máxima producción, de aproximadamente 333 quintales.

b) Q = - $\frac{2}{3}$ L^3 + 10 L^2

$DomQ$ = ☼

Intercepto con los ejes coordenados:

Eje de las x: - $\frac{2}{3}$ L^3 + 10 L^2 = 0

L^2(- $\frac{2}{3}$ L +10) = 0

Eje de las y: Si x = 0, y = 0.

Luego, (0; 0).

$L^2 = 0$ ó $-\frac{2}{3}L + 10 = 0$

$L = 0$ ó $L = 15$

Luego, (0; 0) y (15; 0) intercepto con el eje de las x.

Asíntotas:

Asíntotas verticales: No tiene, pues la función no tiene puntos en los que no esté definida.

Asíntotas No verticales:

$y = mx + n$

$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}(-\frac{2}{3}L^2 + 10L) = \infty$ No tiene asíntotas no verticales.

Monotonía y puntos extremos:

$Q' = -2L^2 + 20L$

$-2L^2 + 20L > 0$

$2L^2 - 20L < 0$

$2L(L - 10) = 0 \Rightarrow L = 0$ ó $L = 10$

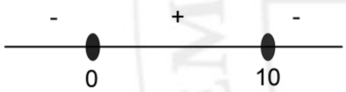


Figura 36

Luego, Q es creciente en [0; 10] , y decreciente en $(-\infty; 0)$ y $[10; +\infty)$. (Comprobarlo en la figura 36).

Entonces, (0; 0) es punto de mínimo, y (10; 333) es punto de máximo.

Concavidad y puntos de inflexión:

$Q'' = -4L + 20$

$-4L + 20 = 0 \Rightarrow L = 5$

Figura 37

Luego, si L < 5, Q es cóncava hacia arriba. Si L > 5, Q es cóncava hacia abajo. (Véase la figura 37). Entonces, L = 5 es punto de inflexión: (5; 166,6).

Observe el gráfico de Q en la figura 38.

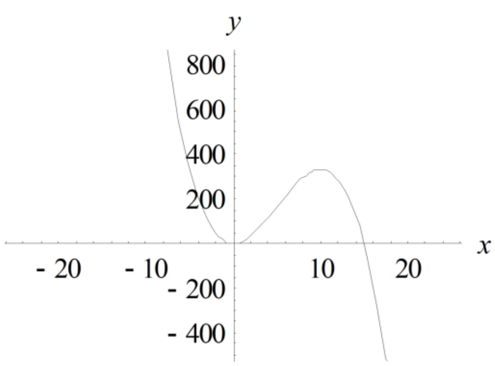


Figura 38

c) Producto marginal:

Q' = $-2L^2 + 20L$ La función de producto marginal es una función cuadrática.

$2L(L - 10) = 0 \Rightarrow L = 0$ ó $L = 10$ Raíces de la función.

Vértice : V($-\frac{b}{2a}$; $f(-\frac{b}{2a})$) = V($-\frac{20}{-4}$; $f(\frac{20}{-4})$) = V(5; 50)

El intercepto con el eje de las Y es el propio cero de la función (0; 0), pues en la parábola, C = 0. Observe el gráfico de la parábola en la figura 39.

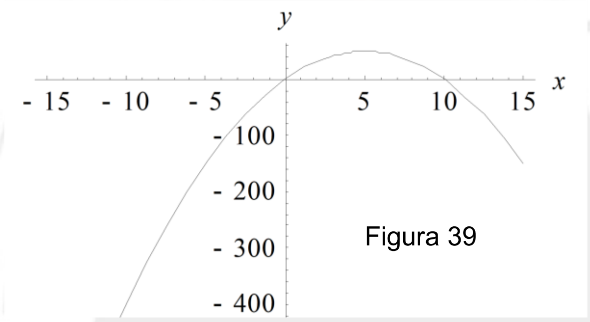


Figura 39

Producto medio:

$\frac{Q(L)}{L} = -\frac{2}{3}L^2 + 10L$

$-\frac{2}{3}L^2 + 10L = 0 \Rightarrow L(-\frac{2}{3}L + 10) = 0 \Rightarrow L = 0$ ó $L = 15$ Ceros de la función.

Vértice:

Otra forma de encontrar el vértice de la parábola, es utilizando la primera derivada de la función:

$Q' = -\frac{4}{3}L + 10$

$-\frac{4}{3}L + 10 = 0 \Rightarrow L = \frac{30}{4} = \frac{15}{2} = 7{,}5$

L = 7,5 es punto crítico, pero, lógicamente, es de máximo, pues la parábola abre hacia abajo porque A < 0.

$$f(7.5) = -\frac{2}{3}.(7.5)^2 + 10.(7.5) = 37.5$$

En la figura 40 se muestra la gráfica de la función del producto medio, y en la figura 41 podemos observar las funciones de producto marginal y producto medio en un mismo sistema de coordenadas.

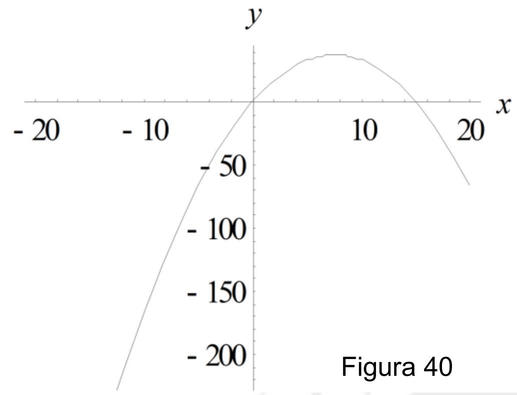


Figura 40

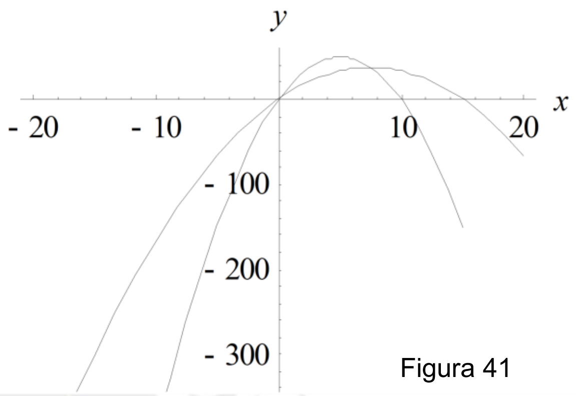


Figura 41

d) El rango de utilización de horas de trabajo diarias $0 \leq L \leq 7.5$, es aquel donde el producto marginal supera al producto medio (verifíquelo en el gráfico). Es el rango en el que, un incremento en una hora de trabajo adicional a partir de cualquier valor de L que pertenezca al rango, determina un incremento productivo superior a la producción promedio en cada uno de los instantes (horas de trabajo) que se encuentran en el rango $0 \leq L \leq 7.5$. Decimos, en estos casos, que los rendimientos de la producción son crecientes en ese intervalo de horas de trabajo. A partir de 7.5 horas, observe que, aunque la producción crece hasta L = 10 horas, crece lentamente. Decimos que los rendimientos, en estos casos, son decrecientes. Comienza a actuar lo que se conoce en Economía como *ley de los rendimientos decrecientes de la producción.* No descuide que, aún actuando la mencionada ley, la producción continúa incrementándose hasta L = 10, pero, en este caso, lo esencial es percatarnos de que este crecimiento es más lento a partir de 7.5 horas de trabajo (compruébelo en el gráfico de Q).

Ejemplo 15:

Dada la función de demanda $p = 4 - q$ y la función de costo medio de un monopolista, C_{me} = $q - 2 + \dfrac{4}{q}$
.

a) Represente las funciones de costo total e ingreso total en un mismo gráfico.

b) Represente las funciones de costo marginal e ingreso marginal en otro gráfico.

c) Determine el valor de q que maximiza la ganancia. Compruebe estos resultados en los gráficos de los incisos a) y b). Halle la ganancia máxima.

d) Calcule la elasticidad de la demanda para $q = 1$ y para $q = 3$. Determine el valor de q para el cual la elasticidad es -1.

Solución:

a) *CT* = C_{me}. q = $\left(q - 2 + \dfrac{4}{q}\right).q = q^2 - 2q + 4$

$q^2 - 2q + 4 = 0$ No tiene intercepto con el eje de las x.

$CT' = 2q-2$

$2q-2=0 \Rightarrow q = 1$

CT(1) = 1^2 -2 + 4 = 3

(1; 3) es el vértice, que es punto de mínimo, porque la función de *CT* es una parábola que abre hacia arriba.

$IT = p.q = (4-q).q = -q^2+4q$

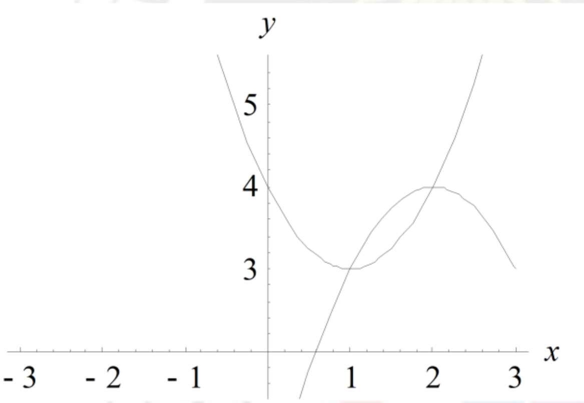
$-q^2+4q=0 \Rightarrow q(-q+4)=0 \Rightarrow q=0$ ó $q=4$ Ceros de la función.

$IT' = -2q+4$

$-2q+4 = 0 \Rightarrow q=2$ Luego, $q=2$ es punto de máximo, pues la función de ingreso total es una parábola que abre hacia abajo.

El gráfico de la figura 42 representa las funciones de costo e ingreso total en un mismo sistema de coordenadas.

Figura 42



b) Costo marginal: $CT' = 2q-2$ Ingreso marginal: $IT' = -2q+4$

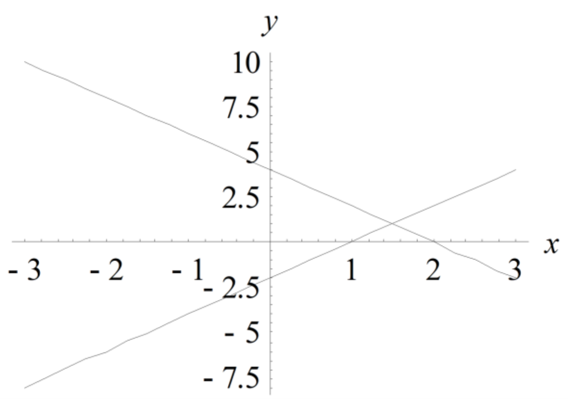
Ambas funciones son lineales. Bastan dos puntos arbitrarios para obtener sus gráficas, o sea, dos rectas.

Denotemos como Cm a la función de Costo marginal, e Im a la función de ingreso marginal.

Si $q=1$, $Cm=0$; si $q=2$, $Cm=2$. Si $q=0$, $\mathrm{Im}=4$; si $q=2$, $\mathrm{Im}=0$.

En la figura 43 se muestran las funciones de costo e ingreso marginal en un mismo sistema de coordenadas.

Figura 43



c) El proceso de optimizar la ganancia comienza por encontrar la función objetivo, en este caso *Ganancia*. Como no está dada en el ejercicio, requerimos modelarla. La ganancia, comúnmente, es el resultado de deducir todos los costos a los ingresos totales obtenidos.

G = IT - CT

$G = -q^2 + 4q - (q^2 - 2q + 4) = -q^2 + 4q - q^2 + 2q - 4$

$G = -2q^2 + 6q - 4$

$G' = -4q + 6$

$-4q + 6 = 0 \Rightarrow q = \frac{3}{2} = 1{,}5$

G'' = - 4 < 0, por lo que $q = 1{,}5$ es punto de máximo.

$G_{máx}$ = -2.(1,5)^2 +6.(1,5) – 4 = 0,5 Esta es la máxima ganancia: 0,5 unidades monetarias.

Observe en el gráfico de la figura del inciso a) que, en el punto q donde se obtiene la máxima ganancia, se verifica la mayor distancia entre las curvas de ingreso y costo total.

Verifique en el gráfico del inciso b), que la máxima ganancia se obtiene en el punto q donde $I' = C'$.

d) $E = \dfrac{Función\ \ marginal}{Función\ \ media} = \dfrac{\frac{-1}{4-q}}{q} = -\dfrac{q}{4-q}$

Si $q = 1$, *E* = - $\frac{1}{3}$

Si $q = 3$, *E* = -3

Si $-\dfrac{q}{4-q} = -1 \Rightarrow q = 2$.

Ejemplo 16:

El director de mercado de una compañía ha estimado que la ganancia depende de la inversión hecha en publicidad, del siguiente modo: $G(x) = \dfrac{22x + 11}{x + 2}$. Esboce gráficamente la función de ganancia.

Solución:

$$G(x) = \frac{22x + 11}{x + 2}$$

$Dom\ G$ = {x ∈ ☼/ x ≠ 0}

Intercepto con los ejes coordenados:

Eje de las X: 22x + 11 = 0 $\Rightarrow$ x = - $\frac{11}{22}$; (- $\frac{11}{22}$; 0)

Eje de las Y: G (0) = $\frac{11}{2}$; (0; $\frac{11}{2}$)

Asíntotas:

Asíntotas verticales:

$\lim\limits_{x\to -2^-} \frac{22x+11}{x+2}$ = +∞, y $\lim\limits_{x\to -2^+} \frac{22x+11}{x+2}$ = - ∞ Luego, x = -2 es asíntota vertical.

Asíntotas No verticales:

$m = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{22x+11}{x^2+2}$ = 0. Luego, si n existe, hay una asíntota horizontal. Investiguémoslo:

$$n = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{22x+11}{x+2} = 22$$

Luego, y = 22 es asíntota horizontal.

Monotonía y puntos extremos:

$$G' = \frac{22(x+2)-(22x+11).1}{(x+2)^2} = \frac{22x+44-22x-11}{(x+2)^2} = \frac{33}{(x+2)^2}$$

Observe que $\frac{33}{(x+2)^2}$ > 0 para todo x. Luego, la función G es siempre creciente, y no tiene puntos extremos.

Concavidad y puntos de inflexión: $G'' = \frac{-33(2)(x+2)}{(x+2)^4}$ = $\frac{-66(x+2)}{(x+2)^4}$

$(x+2)^4 = 0$ $\Leftrightarrow$ x = -2 Cero del denominador.

$-66(x+2) = 0$ $\Leftrightarrow$ x = -2 Cero del numerador.

Luego, x = -2 es una solución que se obtuvo 5 veces. Existe cambio de signo alrededor de este punto. (Véase la figura 44).

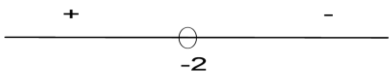


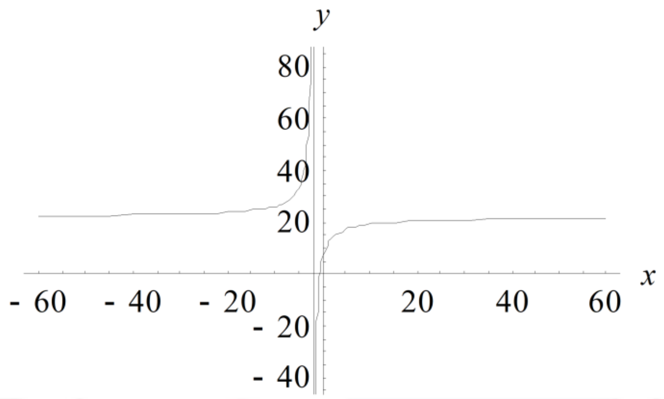
Figura 44

La función es cóncava hacia arriba en $(-\infty,-2)$, y cóncava hacia abajo en $(-2,+\infty)$.

No tiene puntos de inflexión, porque x = -2 no pertenece al dominio de G.

Luego, en la gráfica de la figura 45 representamos la función de ganancia.

Figura 45



Ejemplo 16:

En un remolino la velocidad del viento es función de la distancia desde el centro del mismo. Esto se puede reproducir mediante la función

$$v(x)=\frac{10x}{x^2+4}$$

donde v es la velocidad del viento en *m/s* y *x* es la distancia desde el centro en *m*.

- Considerando que las velocidades negativas implican únicamente dirección, calcular la distancia del centro a la cual la velocidad del remolino es máxima.

- Graficar la función utilizando intersecciones, puntos críticos y puntos de inflexión.
- Discutir lo que sucede con la velocidad del viento conforme la distancia del centro aumenta.

Solución

Para encontrar los puntos en que la velocidad es máxima se busca la derivada de la función.

$$= \frac{(x^2+4)10-10x(2x)}{(x^2+4)^2} = \frac{10x^2+40-20x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{40-10x^2}{(x^2+4)^2}$$

$$\frac{40-10x^2}{(x^2+4)^2} = 0$$

$$40-10x^2 = 0$$

$$x = \pm 2$$

Hay dos puntos críticos, en *x*=2 *m* y *x*=-2 *m*. Para saber si son máximos o mínimos, se utiliza el criterio de la segunda derivada.

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{40-10x^2}{(x^2+4)^2}\right) = \frac{(x^2+4)^2(-20x)-(40-10x^2)2(x^2+4)(2x)}{(x^2+4)^4} =$$

$$= \frac{-20x(x^2+4)\left[(x^2+4)-(8-2x^2)\right]}{(x^2+4)^4} = \frac{-20x\left[3x^2-4\right]}{(x^2+4)^3}$$

$$\left.\frac{d^2v}{dx^2}\right|_{x=-2} = \frac{-20(-2)\left[3(-2)^2-4\right]}{((-2)^2+4)^3} = \frac{40[12-4]}{(4+4)^3} = \frac{320}{4096} > 0 \therefore minimo$$

$$\left.\frac{d^2v}{dx^2}\right|_{x=2} = \frac{-20(2)\left[3(2)^2-4\right]}{((2)^2+4)^3} = \frac{-40[12-4]}{(4+4)^3} = \frac{-320}{4096} < 0 \therefore maximo$$

El mínimo, en este caso, representa el punto en *x* para el cual la velocidad es máxima pero con signo negativo. Entonces, para los valores negativos de *x*, la velocidad es negativa y para valores positivos de *x* la velocidad es positiva.

Los puntos de inflexión se pueden encontrar igualando a cero la segunda derivada, por lo tanto,

$$\frac{-20x\left[3x^2-4\right]}{\left(x^2+4\right)^3}=0$$

$$-20x\left[3x^2-4\right]=0$$

$$-20x=0 \qquad 3x^2-4=0$$

$$x=0 \qquad x=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}$$

Hay tres puntos de inflexión, esto es, la función cambia tres veces de concavidad.

Las raíces de la función se encuentran igualando a cero la función

$$\frac{10x}{x^2+4}=0$$

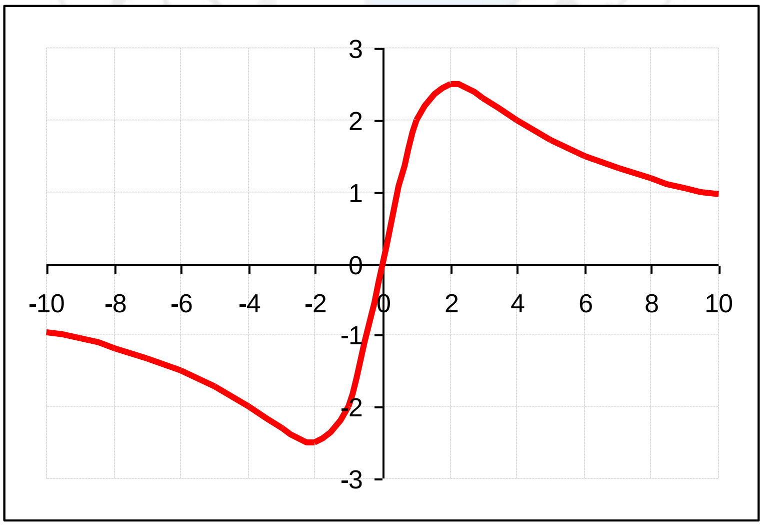
$$10x=0$$

$$x=0$$

La función pasa por el origen.

Esta es una función racional en la que no hay asíntotas puesto que el denominador es diferente de cero para toda *x* real. La gráfica de la función se muestra a continuación.

Figura 46



Por último, se busca saber que sucede lejos del centro del remolino. Para ello, se puede obtener el límite de la función cuando *x* tiende a infinito.

$$Lim_{x\to\infty}\frac{10x}{x^2+4}=0$$

por lo tanto, lejos del centro, la velocidad tiende a cero.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Calcular:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$

d) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{x^3}$

2. Encuentre:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln(x-2)}{\ln(e^x-e^2)}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{sen\frac{4}{x}}{\frac{1}{x}}$

3. Calcular:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{senx}-\frac{1}{x}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}$

4. Hallar:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x\cos x-sen\,x}{x^3}$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x}{1-sen\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$

5. Analizar si se cumple el teorema del valor medio para la función $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ en [-1; 1] y encuentre los puntos x $\in$ (-1; 1) tales que: $f'(x) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

6. Comprobar si se cumplen las condiciones del teorema de Lagrange para la función $f(x) = x - x^3$ en [-2; 1] y hallar el correspondiente valor intermedio.

7. Comprobar si se cumplen las condiciones del teorema de Cauchy para las funciones dadas en los intervalos señalados, y hallar el valor intermedio.

a) $f(x) = x^2 + 2$ $\quad g(x) = x^3 - 1$ en [1; 2]

b) $f(x) = sen\ x$ $\quad g(x) = cos\ x$ en $[0; \frac{\pi}{2}]$

8. Trazar la gráfica de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ b) $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ c) $f(x) = \dfrac{x}{x^3+1}$

9. Aproximarse al gráfico de las siguientes funciones:

a) $f(x) = -x^2 + 12x - 20$ b) $f(x) = x^3 - 27x$

10. Esbozar gráficamente:

a) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ b) $f(x) = e^{-x^2}$

c) $f(x) = x \ln x$ d) $f(x) = \begin{cases} x^4 - x^3 & si \ \ x \leq 1 \\ \dfrac{x^3 - 1}{7} & si \ 1 < x < 2 \\ x^2 - x & si \ \ x \geq 2 \end{cases}$

11. Para el producto de un monopolista, la función de demanda es: $p = 72 - 0{,}04q$, y la función de costos es $C = 500 + 30q$.

¿A qué nivel de producción se maximiza la utilidad?

¿A qué precio ocurre este, y cuál es la utilidad correspondiente?

12. Para el producto de un monopolista, la función de demanda es: $p = \dfrac{50}{\sqrt{q}}$; y la función de costo promedio es: $\overline{C} = 0{,}50 + \dfrac{1000}{q}$.

Encuentre el precio y la producción que maximizan la utilidad.

A este nivel, demuestre que el ingreso marginal es igual al costo marginal.

13. Un fabricante ha determinado que, para cierto producto, el costo promedio $\overline{C}$ por unidad, está dado por: $\overline{C} = 2q^2 - 36q + 210 - \dfrac{200}{q}$, donde $2 \le q \le 10$.

a) ¿A qué nivel dentro del intervalo [2; 10] debe fijarse la producción para minimizar el costo total?

b) Si la producción tuviese que encontrarse dentro del intervalo [5; 10], ¿qué valor minimiza el costo total?

14. La demanda de un mercado monopolizado sigue la ley: *p = 100 -3x*, y el monopolista produce x unidades a un costo total de: $C = \dfrac{1}{2}x^2 - 3x + 1500$. Determinar el precio del artículo y la cantidad que debe producirse para obtener la máxima utilidad.

15. Para un monopolista, el costo por unidad de producir un artículo es de $3.00, y la ecuación de demanda es $p = \dfrac{10}{\sqrt{q}}$.

¿Cuál es el precio que dará la utilidad máxima?

16. Para el producto de un monopolista, la ecuación de demanda es: *p = 42 -4q* y la función de costo promedio es: $\overline{C} = 2 + \dfrac{80}{q}$. Encuentre el precio que maximiza la utilidad.

17. Un fabricante puede producir cuando mucho, 420 unidades de cierto artículo cada año. La ecuación de demanda para ese producto es: $p = q^2 - 100q + 3200$, y la función de costo promedio del fabricante es: $\overline{C} = \dfrac{2}{3}q^2 - 40q + \dfrac{10000}{q}$.

Determine la producción *q* que maximiza la utilidad y la correspondiente utilidad máxima.

OTRAS APLICACIONES DE LA DERIVADA A LA ECONOMIA.

La función Costo, C(q) es igual al costo total de producir una cantidad q de cierto artículo.

La función Ingreso I(q) , representa el ingreso total que percibe una empresa al vender la cantidad q de cierto artículo. Ingreso es la cantidad obtenida por las ventas. Si el precio por artículo es igual a p, y la cantidad vendida es q, entonces:

Ingreso = (precio) (cantidad); de modo que ***I = p q***

La utilidad que resulta al producir y vender q artículos se define como:

Utilidad = Ingresos - Costos

Es decir: $U(q) = I(q) - C(q)$

Análisis Marginal.

Muchas decisiones económicas se basan en un análisis de costos e ingresos “en el margen”.

Supóngase que administramos una aerolínea y que tratamos de determinar si ofrecer un vuelo adicional. ¿ Cómo se puede tomar esa decisión?,supóngase que hay que tomar la decisión solamente sobre bases financieras: si el vuelo produce dinero a la empresa, se debe adicionar. Se observa claramente que se necesita considerar los costos incurridos y los ingresos obtenidos. Como la elección es entre adicionar el vuelo y dejar la situación como está, la pregunta fundamental es si los costos adicionales incurridos son mayores o menores que los ingresos adicionados generados por el vuelo. Esos costos e ingresos adicionales se llaman costos marginales e ingresos marginales.

- Si C(q) es la función que determina el costo total de funcionar con q vuelos. Si la línea aérea hubiera planificado funcionar con 500 vuelos, sus costos serían C(500). Con el vuelo adicional, sus costos serían C (501).

Luego tenemos que: $\frac{C(501) - C(500)}{501 - 500}$, es la rapidez promedio del costo entre 500 y 501 vuelos.

- **La rapidez instantánea de cambio del costo con respecto a la cantidad de unidades producidas es C´(q) y representa es el costo de producir una unidad adicional n + 1, después de haber producido n unidades.**

De forma similar, si el ingreso generado por q vuelos es I(q), Si la línea aérea hubiera planificado funcionar con 500 vuelos, sus ingresos serían I(500). Con el vuelo adicional, sus ingresos serían I (501).

Luego tenemos que: $\frac{I(501) - I(500)}{501 - 500}$, es la rapidez promedio del ingreso entre 500 y 501 vuelos.

- **La rapidez instantánea de cambio del ingreso con respecto a la cantidad de unidades vendidas es I´(q) y representa el ingreso de vender una unidad adicional n + 1, después de haber vendido n unidades.**

Utilidad marginal.

Ya que Utilidad = Ingresos - Costos

Es decir: U (q) = I (q) - C (q).

Luego: Utilidad Marginal= Ingreso Marginal – Costo Marginal

Utilidad Marginal=: U´(q) = I ´(q) - C ´(q).

Ejemplo. Suponga que el costo total, C(q) de producir q artículos viene dado por la expresión: $C(q) = 0.01\, q^3 - 0.6\, q^2 + 13\, q + 200$

a) ¿Cuál es el costo fijo?
b) ¿Cuál es el costo variable?
c) Determine los costos totales al producir 100 unidades
d) Determine la función costo promedio
e) Determine el costo promedio al producir 100 unidades
f) Determine la función costo marginal

g) Determine el costo de producir la unidad # 101

Solución.

a) Costos fijos: $ 200

b) Costo variable: $0.01\,q^3 - 0.6\,q^2 + 13\,q$

c) C(100) = $0.01\,(100)^3 - 0.6\,(100)^2 + 13(100) + 200 = \$\,5500$

d) Función costo promedio:

$$\overline{C(q)} = \frac{C(q)}{q} = \frac{0.01\,q^3 - 0.6\,q^2 + 13\,q + 200}{q} = 0.01\,q^2 - 0.6\,q + 13 + \frac{200}{q}$$

e) Costo promedio al producir 100 unidades: $0.01\,(100)^2 - 0.6\,(100) + 13 + \dfrac{200}{100} = \$\,55$

f) Función costo marginal: $C\,'(q) = 0.01\,(3q^2) - 0.6\,(2q) + 13\,(1) + 0$

$$C\,'(q) = 0.03\,q^2 - 1.2\,q + 13$$

g) Costo de producir la unidad # 101:
C ´(100) =

Ejercicios.

1) Supóngase que C(q) es el costo total de la producción, en dólares, de ciertos artículos, siendo: $C(q) = \dfrac{1}{2}\,q^2 - 2\,q + 5$

Determine: a) Determine la función costo promedio

b) Determine la función costo marginal

c) El costo total al producir 1000 unidades

d) El costo promedio al producir 1000 unidades

e) El costo de producir la unidad # 1001

2) Si la ecuación de demanda para cierta mercancía es $p^2 + q - 12 = 0$.

Encontrar : **a)** La función del precio

b) La función del ingreso total

c) La función del ingreso marginal

d) El ingreso total al vender 8 unidades

e) El ingreso al vender la unidad # 9

Solución.

a) Ya que la función precio debe ser siempre positiva, tenemos que $p(q) \geq 0$ **:**

Luego: $p(q) = \pm\sqrt{12-q}$ **pero como** $p(q) \geq 0$ **se tiene que:** $p(q) = \sqrt{12-q}$

b) Función ingreso total: $I(q) = q\ \sqrt{12-q} = q(12-q)^{\frac{1}{2}}$

c) Función ingreso marginal: $I\,'(q) = \sqrt{12-q} + \frac{1}{2}(12-q)^{-\frac{1}{2}}(-1)q$

$I\,'(q) = \sqrt{12-q} + \frac{1}{2}(12-q)^{-\frac{1}{2}}(-1)$ **q**

$I\,'(q) = \sqrt{12-q} + \frac{1}{2}\ \frac{(-1)q}{(12-q)^{\frac{1}{2}}}$ **;** $I\,'(q) = \sqrt{12-q} + \frac{1}{2}\ \frac{(-1)q}{\sqrt{12-q}}$

d) $I(8) = 8\ \sqrt{12-8} = 8\ \ \sqrt{12-8} = 8(2) = \$16$

e) El ingreso al vender la unidad # 9:

$$I\,'(8) = \sqrt{12-8} + \frac{1}{2}\ \frac{(-1)8}{\sqrt{12-8}} = 2 - \frac{8}{4} = 0$$

Ejercicios.

1) El número de dólares del costo total de la manufactura de q relojes en cierta fábrica, está dada por: $C(q) = \frac{20}{q} + 30\,q + 1500$

Encontrar: a) La función costo promedio

b) El costo promedio al producir 550 relojes

c) La función costo marginal

d) El costo marginal cuando q = 40

e) El costo de manufactura del cuadragésimo primer reloj.

2) Si C(q) es el costo total de la manufactura de "q" juguetes y $C(q) = 110 + 4q + 0.02\,q^2$. Encontrar:

a) La función costo promedio

b) La función costo marginal

c) El costo promedio al producir 500 juguetes

d) El costo marginal cuando q = 10

e) El costo de manufactura del onceavo juguete

3) Supóngase que un líquido se produce por cierto proceso químico y que la función del costo total C(q) está dado por $C(q) = 6 + 4\,\sqrt{q}$, donde C(q) dólares es el costo total de la producción de q galones del liquido. Encontrar:

a) El costo de producir el 17 avo. galón

b) El número de galones producidos cuando el costo marginal es de $ 0.40 por galón.

4) Una compañía constructora renta cada departamento en p dólares por mes cuando se rentan x departamentos y $p = 10\,\sqrt{300 - 2x}$.

¿Cuántos departamentos deben de ser rentados para que el ingreso marginal sea cero?

5) Si la ecuación de la demanda para cierta mercancía es 3 q + 4 p = 12. Encontrar:

a) La función del precio

b) La función del ingreso total. Recuerde que : ***Ingreso = precio* x *cantidad***

c) La función del ingreso marginal

6) Sea $I(q) = 2 + 3\,\sqrt{q-1}$ donde $q \in [2,17]$. Encontrar

a) La ecuación de demanda

b) La función del precio

c) La función del ingreso marginal

7) La ecuación de la demanda de cierta mercancía es $p = (q-8)^2$ y la función del costo total está dada por $C(q) = 18\,q - q^2$ donde $C(q)$ dólares es el costo total cuando se compran q unidades.

a. Encontrar la función de ingreso total
b. Encontrar las funciones de ingreso marginal y de costo marginal
c. Encontrar el valor de "q" para el cual el costo marginal sea igual al ingreso marginal.

VALORES MÁXIMOS Y MINIMOS DE UNA FUNCIÓN

Definición.

La función f se dice que tiene un valor mínimo relativo en x = c, si existe un intervalo abierto que contenga a "x = c" sobre el cual está definida f tal que $f(c) \leq f(x)$ para toda x en ese intervalo.

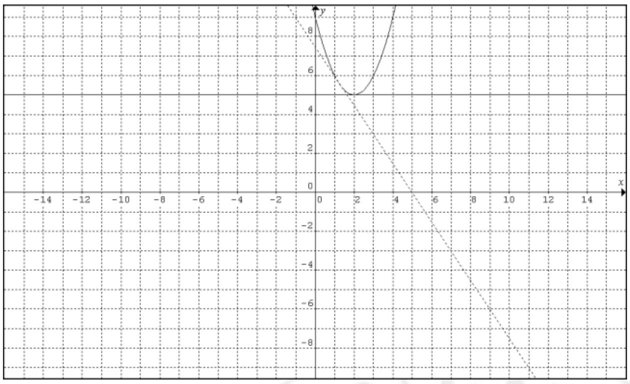
Definición.

La función f se dice que tiene un valor máximo relativo en x = c, si existe un intervalo abierto que contenga a "x = c" sobre el cual está definida f tal que $f(c) \geq f(x)$ para toda x en ese intervalo.

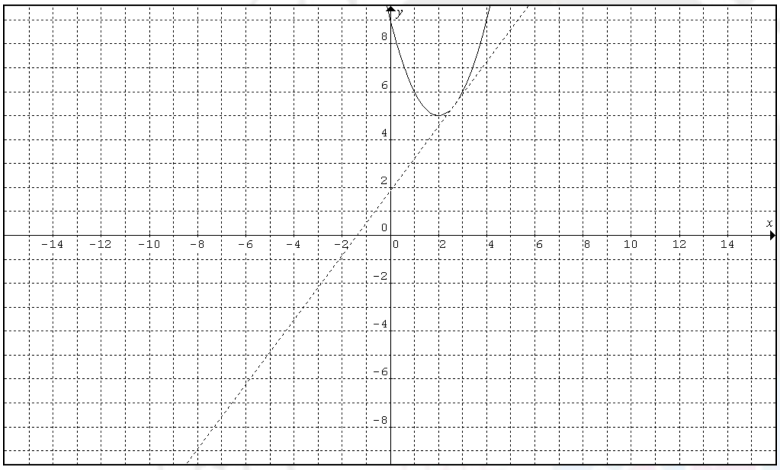
Si la función f tiene un valor máximo relativo o un valor mínimo relativo en x=c, entonces se dice que f tiene un extremo relativo en x=c.

Observe las siguientes figuras: Sea $f(x) = (x-2)^2 + 5$

Analicemos las pendientes de las rectas tangentes a la izquierda de x = 2

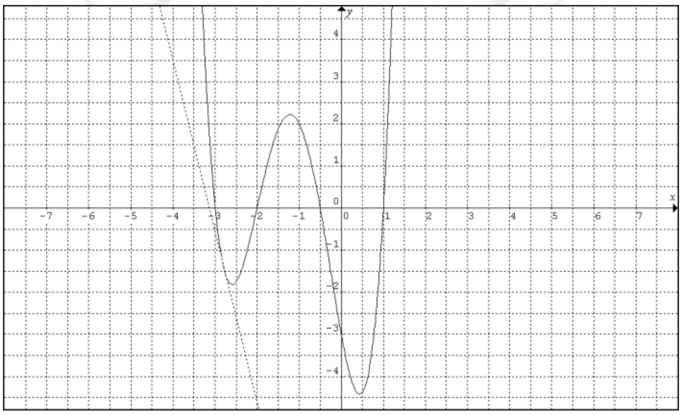


Analicemos las pendientes de las rectas tangentes a la derecha de x = 2

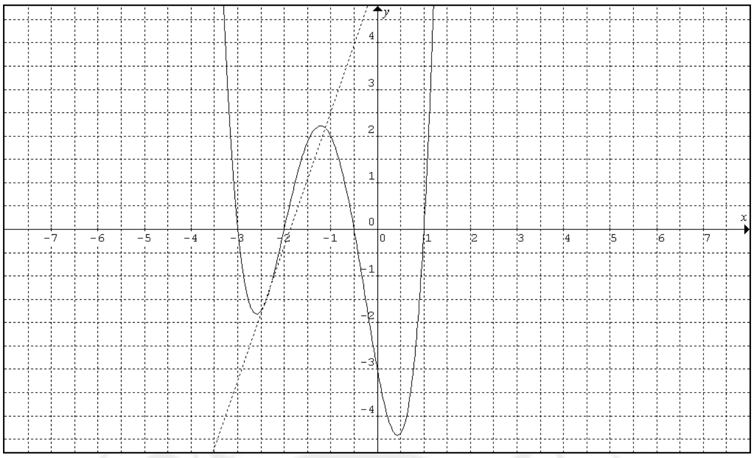


Observe que en x **= 2 existe un valor mínimo para y=f(x), el cual es y=5**

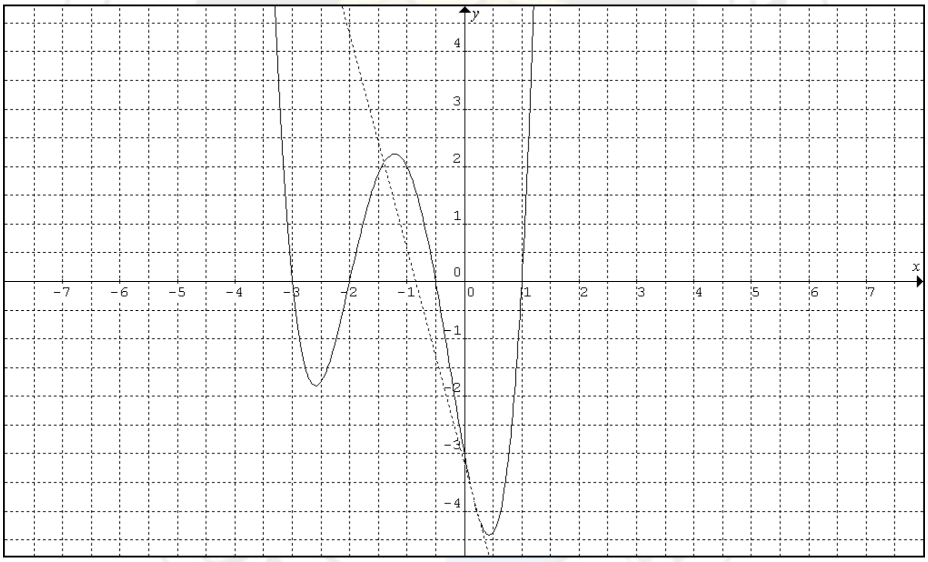
Sea $y = x^4 + 4.5x^3 + 3x^2 - \frac{11}{2}x - 3$. Observemos su gráfico: Analicemos las pendientes de las rectas tangentes a la izquierda de x = - 1.2189



Analicemos las pendientes de las rectas tangentes a la derecha de x = - 1.2189

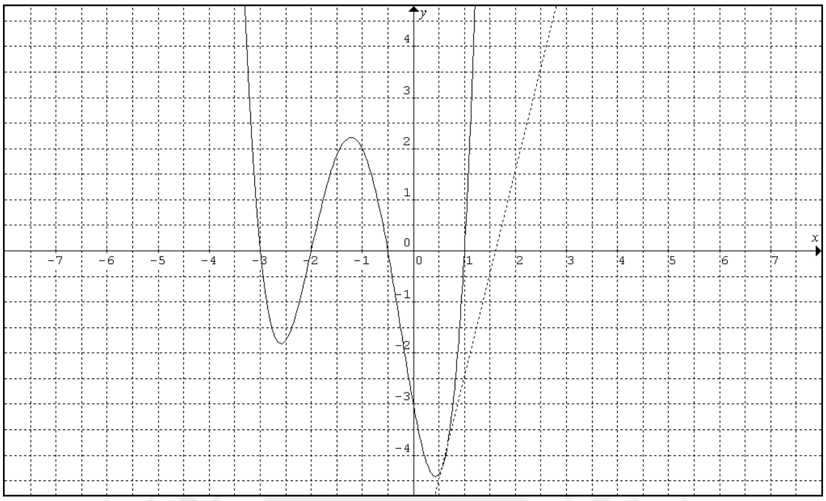


Analicemos las pendientes de las rectas tangentes a la izquierda de x=0.4353



$$y = x^4 + 4.5x^3 + 3x^2 - \frac{11}{2}x - 3$$

Analicemos las pendientes de las rectas tangentes a la derecha de x=0.4353



Note que en x **= -1.2189 existe un punto máximo y existe puntos mínimos en** x **= 0.4353 y en x= -2.5914**

PUNTOS CRITICOS.

SON AQUELLOS PUNTOS EN LOS CUALES $f'(x) = 0$ **Ó** $f'(x)$ **NO EXISTE.**

- **Observe que si tenemos la función y = f(x). Existe un punto mínimo relativo en x= x_1, si** $f'(x_1) = 0$ **ó si** $f'(x_1)$ **NO EXISTE y si alrededor de valor de x_1,** $f'(x)$ **cambia de negativa a positiva.**

- **Observe que si tenemos la función y = f(x). Existe un punto máximo relativo en x= x_1, si** $f'(x_1) = 0$ **ó si** $f'(x_1)$ **NO EXISTE y si alrededor de valor de x_1,** $f'(x)$ **cambia de positiva a negativa.**

CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA.

- **Si el punto $P_1(x_1,y_1)$ es un punto crítico de la función y=f(x) y si $f''(x_1) < 0$, entonces en x= x_1, existe un punto máximo.**

- **Si el punto $P_1(x_1,y_1)$ es un punto crítico de la función y=f(x) y si $f''(x_1) > 0$, entonces en x= x_1, existe un punto mínimo.**

Ejercicios.

Utilizando el criterio de la segunda derivada, encuentre los puntos máximos y mínimos de las siguientes funciones:

1) $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$

2) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$

3) Supóngase que la ecuación de demanda de cierta mercancía **es** $p = 4 - 0.0002q$ y $0 \leq q \leq 20{,}000$ donde q es el número de unidades producidas semanalmente y p dólares es el precio cada unidad. El número de dólares del costo total de la producción de q unidades es

p = 600 + 3 q. Si la utilidad semanal debe ser tan grande como sea posible, encontrar:

a) el número de unidades que se producirán cada semana.
   Rta q = 2500 unidades

b) el precio unitario **Rta $ 3.50**

c) La ganancia semanal. **Rta U=$ 650**

NOTE QUE: LA UTILIDAD MAXIMA O MINIMA SE PUEDE PRESENTAR CUANDO COSTO MARGINAL = INGRESO MARGINAL.

4) Determinar la cantidad q que maximiza a la utilidad si el ingreso total y el costo total se expresan como sigue: I(q) = 5 q – 0.003 q^2

C(q) = 300 + 1.1 q

en donde $0 \leq q \leq 800$, estando I(q) y C(q) en dólares. ¿Qué nivel de producción da como resultado la utilidad máxima?

Rta q = 650 unidades

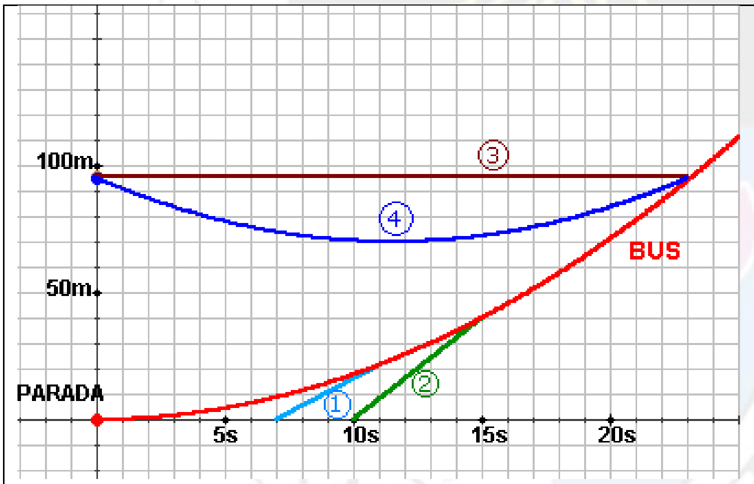
APLICACIONES DE LA DERIVADA A LA FÍSICA, BIOLOGÍA Y OTRAS CIENCIAS

- Si **e=f(t)** nos da la posición de un móvil respecto al tiempo, entonces **v=f '(t)** nos da la velocidad de ese móvil en cada instante.
- Si **v=g(t)** nos da la velocidad de ese móvil en función del tiempo, entonces **a=g'(t)** nos da su aceleración.
- En general, si **f(t)** da la variación de una variable respecto al tiempo, entonces **f '(t)** da la rapidez con que varía esa variable al transcurrir el tiempo.

EJERCICIOS APLICATIVOS

1. Consideremos de nuevo el ejemplo del autobús que viene en el libro en la página 302.
   Ahora sabemos más y podemos resolver mejor el problema.

Esta era la situación del movimiento del autobús y de los cuatro viajeros en función del tiempo:



Ecuaciones de movimiento del:

Autobús $e = \frac{40}{225}t^2$

Viajero (1) $e = 5.35t - 37.45$

Viajero (2) $e = 8t - 80$

Viajero (3) $e = 96$

Viajero (4) $e = \frac{100}{529}t^2 - \frac{100}{23}t + 95$

Donde *e* es el espacio en metros y *t* el tiempo en segundos.

a) ¿En qué instante llegan a la parada los viajeros 1 y 2 ? (Hay que mirar en la gráfica y también haciendo cálculos con las ecuaciones dadas)

b) ¿A qué distancia se encuentran de la parada los viajeros 3 y 4, cuando arranca el autobús de la parada? (Hay que mirar en la gráfica y también haciendo cálculos con las ecuaciones dadas)

c) ¿En qué instante y a qué distancia de la parada se encuentran cada uno de los cuatro viajeros con el autobús? (Hay que mirar en la gráfica y también haciendo cálculos con las ecuaciones dadas)

d) Calcula la velocidad tanto del autobús, como de cada viajero, en cada instante calculando la derivada de cada función espacio

e) Deduce qué viajero alcanza el autobús "suavemente" y cuál no.

2. Imaginemos que el número de bacterias de un cultivo varía con el tiempo, expresado en minutos, según la ecuación $N=500+50t-t^2$ para $t\in[0,35]$

¿Cuál es la velocidad de crecimiento de la población en el instante t=7 min?

Dibuja la gráfica de la función e interpreta el resultado en la gráfica

3. Un cochecito teledirigido se lanza por una cuesta. La distancia recorrida en metros al cabo de t segundos viene dada por $d=0.2t^2+0.03t^3$

a) ¿Qué velocidad lleva al cabo de 2 seg, 5 seg, y 6 seg?

b) Cuando el cochecito alcanza una velocidad de 46.8 km/h, los frenos son insuficientes ¿Cuánto tiempo puede permanecer bajando sin que el conductor se preocupe por sus frenos?

4. Un cohete se desplaza según la función $y = 100t + 2000t^2$, en la que y es la distancia recorrida en km y t el tiempo en horas.
    a. Calcula la función velocidad
    b. Calcula la función aceleración (así como la función velocidad se obtiene derivando la función distancia, la función aceleración se obtiene derivando la función velocidad)
    c. ¿Cuánto vale la velocidad inicial (t=0)? ¿Y la aceleración inicial?

Solución al problema del autobús

El viajero 1 llega a la parada a los 7 seg de haber arrancado el autobús, y el 2 a los 10 seg.

Además de verlo en la gráfica se puede deducir haciendo y=0 en las ecuaciones de movimiento de cada uno.

$e = 5.35t - 37.45$ e=0, t=7 seg

$e = 8t - 80$ e=0, t=10 seg

b) El viajero 3 se encuentra a 96 metros de la parada cuando arranca el autobús, y el 4 a 95 m.

Además de verlo en la gráfica se puede deducir haciendo t=0 en las ecuaciones de movimiento de cada uno.

$e = 96$ t=0, o cualquier valor de t, e=96, distancia = 96 m

$$e = \frac{100}{529}t^2 - \frac{100}{23}t + 95$$, t=0, e=95 m, distancia = 95 m

c) Resolviendo el sistema entre la ecuación del autobús y la del viajero 1 encontraremos que una de las soluciones es t=11 seg, y se puede comprobar en la figura que es el instante donde se encuentran sus gráficas. O sea, el viajero 1 alcanza al autobús a los 11 seg de haber arrancado.

Haciendo lo mismo con el viajero 2, obtenemos que alcanza al autobús a los 15 seg.

El 4 lo alcanza a los 23 seg, y el 3 a los 23 seg.

d)

Ecuaciones de movimiento del:	**Derivada=velocidad**
Autobús $e = \frac{40}{225}t^2$	$v_{bus} = e'(t) = \frac{de}{dt} = \frac{80}{225}t$
Viajero 1 $e = 5.35t - 37.45$	$v_1 = e'(t) = \frac{de}{dt} = 5.35$
Viajero 2 $e = 8t - 80$	$v_2 = e'(t) = \frac{de}{dt} = 8$
Viajero 3 $e = 96$	$v_3 = e'(t) = \frac{de}{dt} = 0$
Viajero 4 $e = \frac{100}{529}t^2 - \frac{100}{23}t + 95$	$v_4 = e'(t) = \frac{200}{529}t - \frac{100}{23}$

e) Como ya conocemos en qué instante alcanza cada viajero al autobús, calculando la velocidad en dichos instantes y comparándola con la del autobús podremos saber la respuesta.

Viajero	instante de alcance	velocidad viajero	velocidad bus	razón velocidades
1	11 seg	e’(11)=5.35 m/s	e’(11)=3.9 m/s	5.35/3.9=1.37
2	15 seg	e’(15)=8 m/s	e’(15)=5.3 m/s	8/5.3=1.5
3	23 seg	e’(23)=0 m/s	e’(23)=8.2 m/s	0/8.2=0
4	23 seg	e’(23)=4.3 m/s	e’(23)=8.2 m/s	4.3/8.2=0.52

Lo ideal es que el viajero vaya a la misma velocidad que el autobús en el momento del alcance, por tanto la razón de velocidades debería ser 1.

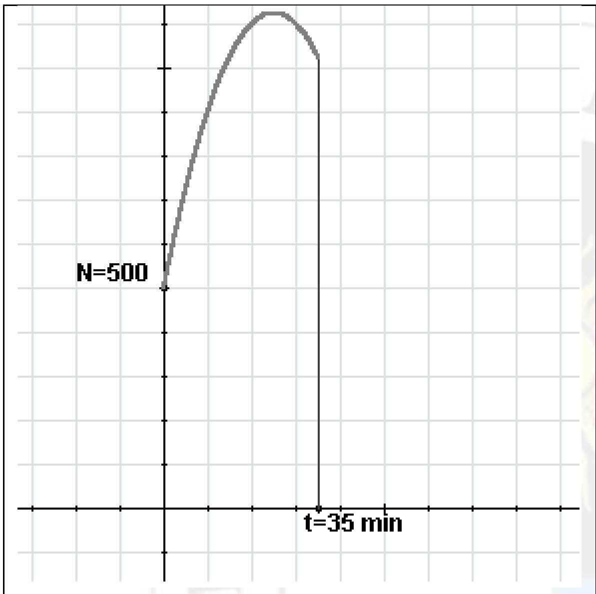
El viajero que lo coge más suavemente es el 1 pues esta razón es la más próxima a 1. Le sigue el 2. Al 4 le costará bastante, pero el que corre verdadero peligro si lo intenta es el 3. Este viajero ha permanecido quieto (vel=0) a 96 metros de la parada, esperando que pase por allí el autobús, pero éste ya va muy rápido al pasar.

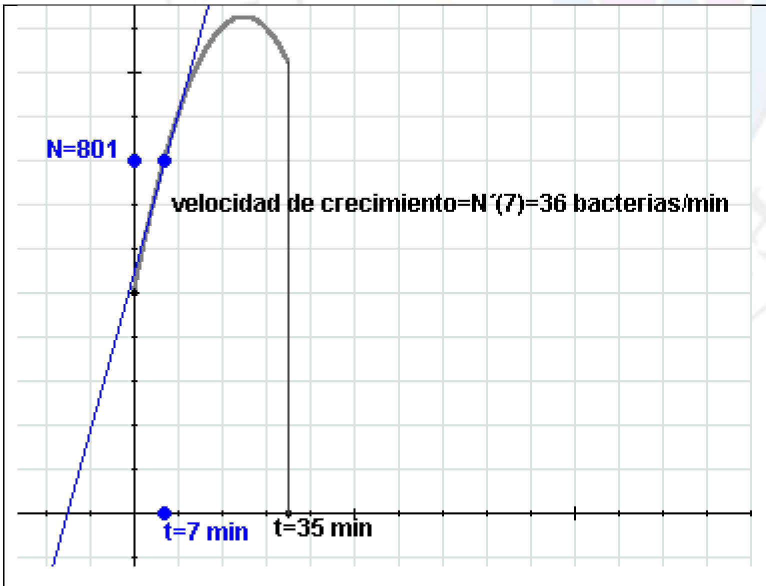
El viajero 4, que estaba a 95 metros de la parada ha corrido en dirección a la parada, y se ha vuelto para correr en la misma dirección del autobús y coger velocidad para el momento del alcance.

SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE LAS BACTERIAS

Hallando la derivada de la función N(t), N'(t) es la velocidad de crecimiento de la población en cualquier instante t.

Hallando N'(7) podremos responder a la pregunta.

	$N=500+50t-t^2$ $N'=50-2t$ $N'(7)=50-2*7=50-14=36$ Velocidad de crecimiento en el instante t= 7 min = 36 bacterias por minuto

	Quiere decir que en el instante 7 min la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto (7, 801) es tag([illegible])=36

SOLUCIÓN AL PROBLEMA DEL MOVIMIENTO CINEMÁTICO

$d=0.2t^2+0.03t^3$

$d'=0.4t+0.09t^2$

$v(2)=d'(2)=0.4*2+0.09*2^2=1.16$ m/s, velocidad a los 2 seg

$v(5)=d'(5)=0.4*5+0.09*5^2=4.25$ m/s, velocidad a los 5 seg

$v(6)=d'(6)=0.4*6+0.09*6^2=5.64$ m/s, velocidad a los 6 seg

Si v=46.8 Km/h → $v = 46.8\frac{km}{h}.\frac{1h}{3600seg}.\frac{1000m}{1km} = \frac{46800}{3600}\frac{m}{seg} = 13m/s$

Si $v(t)=d'(t)=0.4*t+0.09*t^2=13$ m/s,

$0.4*t+0.09*t^2-13=0$

$0.09*t^2+0.4*t-13=0$ resolviendo esta ecuación queda

t=10 seg

A los 10 segundos pueden fallar los frenos del coche.

SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DEL COHETE

Un cohete se desplaza según la función $y = 100t + 2000t^2$, en la que y es la distancia recorrida en km y t el tiempo en horas.

a. Calcula la función velocidad → $y' = 100 + 4000t$
b. Calcula la función aceleración → $y'' = 4000$
c. ¿Cuánto vale la velocidad inicial (t=0)? → $v_0 = 100\ km/h$
   ¿Y la aceleración inicial? → $a_0 = 4000\ km/h^2$

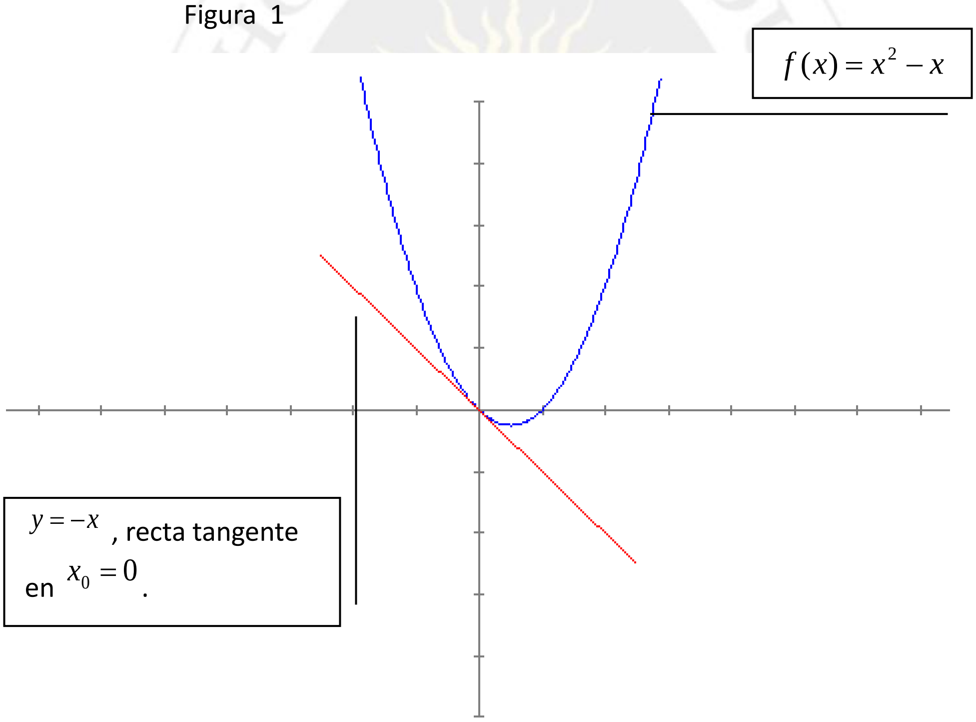
RESUMEN DE LAS APLICACIONES DE LA DERIVADA

1. RECTA TANGENTE A UNA CURVA

Y = f(x)

La pendiente de la recta tangente a una función en un punto x_0 es el valor de la derivada de la función en ese punto $pendiente = f'(x_0)$, así la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto x_0 es $y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_o)$

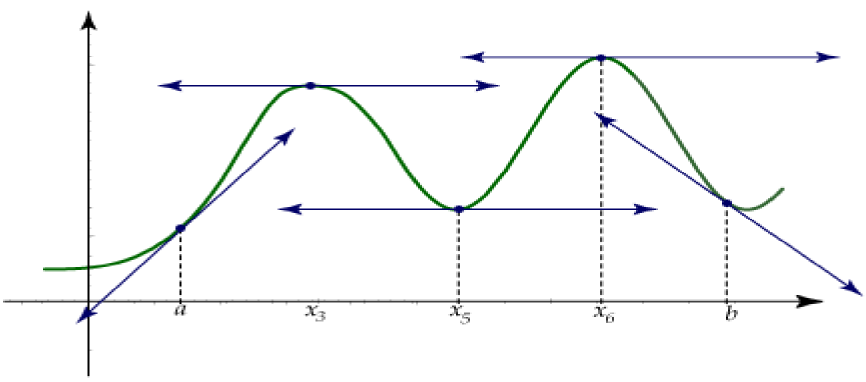
Figura 1



2. INFORMACIÓN EXTRAIDA DE LA PRIMERA DERIVADA

Observa la gráfica siguiente y ten en cuenta la relación entre derivada en un punto y la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto.

Figura 2



2.1. RELACIÓN ENTRE CRECIMIENTO Y DERIVADA

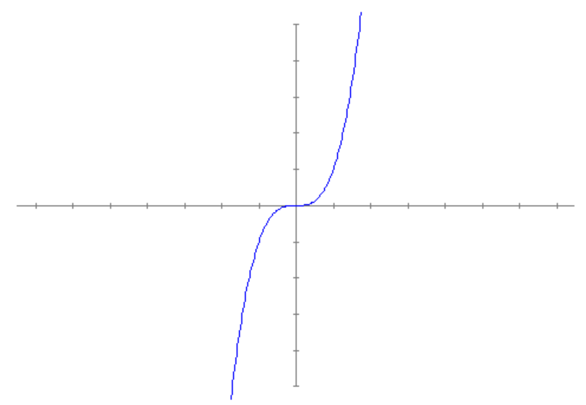
$f(x)$ derivable y creciente en $x_0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0$

$f(x)$ derivable y decreciente en $x_0 \Rightarrow f'(x_0) \leq 0$

Ejemplo:

$y = x^3$ es derivable en todo R y su derivada es $y' = 3x^2$. La gráfica es

Figura 3. La gráfica de la función cúbica en el origen



se observa que en $x_0 = 0$ la función es creciente (de hecho, es creciente en todo su dominio), luego la derivada en ese punto tendrá que ser mayor o igual a 0. Efectivamente $f'(0) = 0 \geq 0$ ($f'(x) \geq 0$ para todo x)

2.2. CRITERIO PARA IDENTIFICAR INTERVALOS CRECIENTES O DECRECIENTES

$f'(x) > 0 \Rightarrow f$ es creciente

$f'(x) < 0 \Rightarrow f$ es decreciente

2.3. MÁXIMOS Y MÍNIMOS RELATIVOS

La función f(x) presenta un máximo relativo en x_0, cuando existe un entorno $E(x_0)$ tal que:

$$f(x) < f(x_0) \quad ; \forall x \in E(x_0), x \neq x_0$$

La función f(x) presenta un mínimo relativo en x_0, cuando existe un entorno $E(x_0)$ tal que:

$$f(x) > f(x_0) \quad ; \forall x \in E(x_0), x \neq x_0$$

2.3.1.CONDICIÓN NECESARIA DE MÁXIMO O MÍNIMO RELATIVO

Si $f(x)$ es derivable en x_0, entonces

$f(x)$ tiene un máximo o un mínimo en $x_0 \quad \Rightarrow f'(x_0)=0$

Sin embargo no es una condición suficiente, porque puede ocurrir que la derivada en un punto valga 0 y que no haya máximo ni mínimo , como en $x_0=0$ en el ejemplo $y=x^3$.

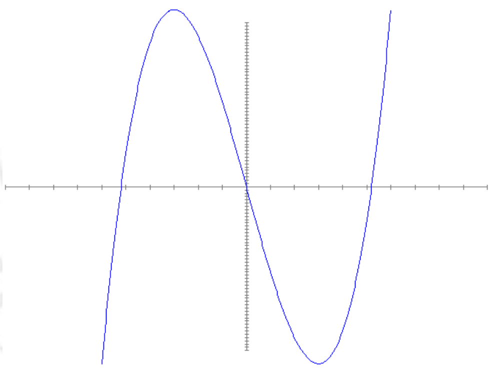
2.3.2.REGLA PARA SABER SI UN PUNTO SINGULAR ES MÁXIMO O MÍNIMO RELATIVO

Para saber si un punto singular (puntos que anulan la derivada) es máximo o mínimo relativo de una función estudiaremos el signo de la derivada primera de la función.

Ejemplo:

$y=x^3-27x$

Figura 4. Su gráfica de la función cúbica



Si calculamos su derivada y estudiamos el signo se tiene, $y'=3x^2-27=3\cdot(x^2-9)=3\cdot(x+3)\cdot(x-3)$

	$-\infty$ -3	-3 3	3 ∞
3	+	+	+
$(x+3)$	-	+	+
$(x-3)$	-	-	+
Signo y'	+	-	+

Luego podríamos decir que la función

- crece en $(-\infty,-3)\cup(3,\infty)$
- decrece en $(-3,3)$

Así que hay un máximo relativo en $(-3, f(-3))$ y un mínimo relativo en $(3, f(3))$ como se observaba en la gráfica.

3. INFORMACIÓN EXTRAIDA DE LA SEGUNDA DERIVADA

Una función es cóncava en un intervalo si la rectas tangentes a la función en ese intervalo están por debajo de la función. Una función es convexa en un intervalo si la rectas tangentes a la función de ese intervalo están por encima.

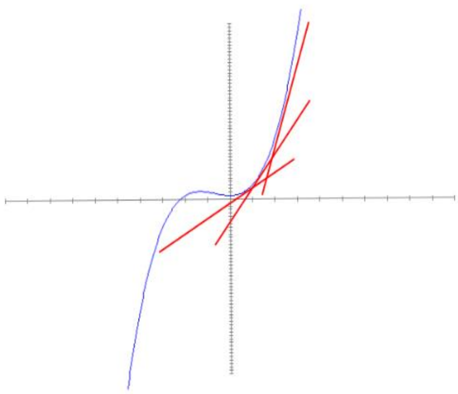
La denominación de convexidad y concavidad depende del punto de vista que se adopte para considerar que es una concavidad, esto es si se mira a la función "desde arriba" o "desde abajo". Por ello, es frecuente que en ocasiones se adopten las denominaciones cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo para evitar las ambigüedades.

Los puntos donde la función cambia de curvatura se llaman puntos de inflexión.

3.1. RELACIÓN DE LA CURVATURA CON LA SEGUNDA DERIVADA

Si observamos la gráfica siguiente veremos que cuando la función es cóncava las pendientes de las rectas tangentes (las derivadas)

tienen un valor cada vez más grande, y cuando es convexa cada vez menor.



Criterios de concavidad o convexidad:

- Por la derivada primera:
  a. Si una función es cóncava las pendientes de las tangentes aumentan (*f´* es creciente).
  b. Si una función es convexa las pendientes de las tangentes disminuyen (*f´* es decreciente).
- Por la derivada segunda:

Si *f* es cóncava hacia arriba $\cup$ entonces *f´* creciente, por lo tanto $f'' \geq 0$
Si *f* es cóncava hacia abajo $\cap$ entonces *f´* decreciente, por lo tanto $f'' \leq 0$

Si $f(x)$ es derivable en x_0 y tiene un punto de inflexión en $x_0 \Rightarrow f''(x_0)=0$

3.2. CRITERIO PARA IDENTIFICAR INTERVALOS CÓNCAVOS Y CONVEXOS

Si una función es derivable dos veces, se tiene

$f''(x) > 0 \Rightarrow f$ es cóncava
$f''(x) < 0 \Rightarrow f$ es convexa

Ejemplo:

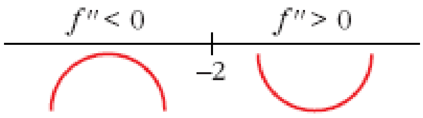
$$y = x\,e^x. \quad Dominio = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = e^x + x\,e^x = (1+x)e^x; \quad f''(x) = e^x + (1+x)e^x = (2+x)e^x$$

$$f''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x = -2 \quad (e^x \neq 0 \quad \text{para todo } x)$$

EJ Signo de $f''(x)$:

1.-



a

b La función: es convexa en $(-\infty, -2)$

c es cóncava en $(-2, +\infty)$

d tiene un punto de inflexión en $\left(-2, -\dfrac{2}{e^2}\right)$

2.- Estudiar la simetría y periodicidad de las siguientes funciones:

$a)\, y = x^3 - 5x$

$b)\, y = \dfrac{x^3 - 5x}{x^3 - 2x}$

$c)\, y = x^2 + x$

$d)\, y = sen(2x+3)$

$e)\, y = sen(2x)$

$f)\, y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$

3.- Estudia la derivabilidad y la continuidad de las siguientes funciones:

$a)\ y=\dfrac{1}{x-2}$

$b)\ y=\dfrac{1}{(x+2)^2}$

$c)\ y=\dfrac{x}{x+1}$

$d)\ y=\dfrac{x+1}{x^2-4x+3}$

$e)\ y=|x-1|$

$f)\ y=\dfrac{x+3}{x^2-3x-10}$

$g)\ y=\dfrac{x^2-1}{x^3-3}$

$h)\ y=\dfrac{\cos x}{x}$

4.- Estudia las asíntotas y ramas infinitas, así como la simetría de las siguientes funciones:

$a)\ y=\dfrac{1}{2x-3}$ $\quad d)\ y=\dfrac{x}{x+1}$ $\quad g)\ y=\dfrac{x^2-4}{x-1}$

$b)\ y=2+\dfrac{4}{4-x^2}$ $\quad e)\ y=\dfrac{x^2}{x-1}$ $\quad h)\ y=\dfrac{x^2-1}{2x+4}$

$c)\ y=x-\dfrac{1}{x}$ $\quad f)\ y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ $\quad i)\ y=\dfrac{x^2+1}{x^2-4x+3}$

5.- En las funciones siguientes determina los intervalos de monotonía, hallando la posición de los puntos críticos y sólo con dicha información intenta razonar la existencia en los mismos de mínimos, máximos o puntos de inflexión:

$a)\ y=x^2-x+1$

$b)\ y=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}-2x+\dfrac{1}{3}$

$c)\ y=x^3-27x+36$

$d)\ y=3x^2-2x^3$

$e)\ y=(x-2)(x-11)(x+13)$

$f)\ y=x^4$

$g)\ y=\dfrac{1}{x^3}$

$h)\ y=\dfrac{1}{(x+1)^2}$

$i)\ y=\dfrac{-2}{(x+1)^3}$

6.- En las funciones del ejercicio anterior determina los intervalos de concavidad y convexidad e intenta volver a razonar la existencia en los mismos de mínimos, máximos o puntos de inflexión sólo con esos datos.

7.- Aplica ahora el criterio de la segunda derivada para determinar los máximos, mínimos y puntos de inflexión de las funciones del ejercicio 5. Determina el valor de los máximos, los mínimos y los puntos de inflexión. Distingue, con toda la información recogida en estos tres ejercicios, entre máximos y mínimos absolutos y relativos.

8.- Representa gráficamente:

$a)\ y = x\,(x+2)\,(x-2)$ $\qquad b)\ y = x^4 - 2x^2$

$c)\ y = 2x^3 + 5x^2 - 4x$ $\qquad d)\ y = |x^2 - 4x + 3|$

$e)\ y = -\dfrac{x^3}{6} + x$ $\qquad f)\ y = x^4 - 2x^2 - 8$

9.- Representa gráficamente:

$a)\ = \dfrac{4}{x^2 - 4}$ $\qquad b)\ y = \dfrac{2x}{x^2 + 2}$

$c)\ y = \dfrac{8}{x^2 + 4}$ curva de Agnesi $\qquad d)\ y = \dfrac{x^2}{x + 2}$

$e)\ y = \dfrac{x^3 + x^2 - 2}{x^2 - 3x - 4}$ $\qquad f)\ y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$

$g)\ y = \dfrac{x + 1}{(x+2)(x+3)(x+4)}$ $\qquad h)\ y = \dfrac{x}{1 + |x|}$

$i)\ = \dfrac{(x+1)(x+2)\ x}{(x-1)(x+3)}$

110.-

Representa gráficamente:

$a)\ = \sqrt{x^2 - 1}$ $\qquad b)\ y = \left[\sqrt{x}\right]^2$

$c)\ = -\sqrt{\dfrac{2 - x}{2 + x}}$ $\qquad d)\ y = \pm\sqrt{\dfrac{x - 1}{4x - 1}}$

$e)\ = \pm\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2 - 4}}$ $\qquad f)\ y^2 = \dfrac{x^2}{3x}$

11.- Sea f (x)= $2x^3 + 2x^2 + 5$. Hallar P (x_0 , f(x_0)) de modo tal que la recta y = 2x + 7 sea tangente al gràfico de f en el punto P.

12.- Sea f (x) = $5x^3 - 6x^2 - 3$. Hallar P = (x_0, f(x_0)) de modo tal que la recta y = 3x – 7 sea tangente al gràfico de f en el punto P.

13.- Sea f(x)=ln(x^2-8)+5. Hallar la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en el punto de abscisas x=3.

14.- Hallar la ecuación de la recta tg. al gráfico $f(x)=\ln(x^2-8)-\sqrt[3]{3x}$ de en el punto de abscisa $x_0=3$.

15.- Si $f(x)=\sqrt{x^3-2x+4}$ escribir la ecuación de la recta tangente al gráfico de *f* en el punto de abscisa *x* = 3.

16.- Sea f(x)= . $\frac{3x^2+\ln(x)}{2x+1}$ Hallar la pendiente de la recta tangente al grafico de f en el punto de abscisa $X_o=1$.

17.- Sea $f(x)=k(x-1)e^2(x+1)$, hallar el valor de k real para que la recta tangente al gráfico de f en el punto de abscisa $x_0=-1$ tenga pendiente 9.

18.- Sea $f(x)=\ln(ax+7)+6x^2$. Hallar *a* para que la recta tangente al grafico de f en $x_0=1$ tenga pendiente m = 11.

19.- Dada $f(x)=1+2\alpha\cos x$, calcular α perteneciente a los reales, en x = 0. Dicha recta debe ser paralela a y= 3x+2

20.- *f*(x)= $ax^3e^{x^2-1}+b$. Hallar $a,b\in\Re$ de modo tal que la recta de ecuación $y=15x-10$ sea tangente al gráfico de *f* en el punto (1;5).

21.- Una compañía de venta a domicilio ha determinado que sus baneficios anuales dependen del número de vendedores verificando la expresión :

$$B(x)=-9x^2+360x+1875$$

donde ***B(x)*** es el beneficio en miles de pesetas para ***x*** vendedores.

Determinar, justificando las respuestas:

a. ¿Qué número de vendedores ha de tener la empresa para que sus beneficios sean máximos?

b. ¿Cuál será el valor de dichos beneficios máximos?

22.- El consumo de combustible (en centenares de litros) de cierta aeronave durante un total de cinco horas de vuelo viene dado por la función :

$$C(t)=\begin{cases} 5t & si \quad 0\le t<1 \\ -t^2+4t+2 & si \quad 1\le t<2.5 \\ 5.75 & si \quad 2.5\le t<4 \\ 28.75-5.75t & si \quad 4\le t\le 5 \end{cases}$$

a. Representar dicha función

b. Interpretar la gráfica obtenida

BIBLIOGRAFIA:

1.-CALCULO II

Chungara, Victor. (1992): Microeconomia.

EDICIONES SHAUM (Tercera Edicion)

Dominick Salvatore

1. volúmenes). Editorial Félix Varela. La Habana.
2. Casas Pardo, José. (1987): *Curso de Economía*. Editorial de Economía Política. S.A. Barcelona.
3. Casasús, T. y otros. (1991): *Cálculo integral. Ecuaciones diferenciales*. Editorial NAV llibres. Valencia.
4. Castillo Serpa, Alfredo. (2004): *Series*. Tomo I. Editorial Félix Varela. La Habana.
5. Chiang, Alpha C. (1987): *Métodos fundamentales de economía matemática*. Mc. Graw – Hill. México.
6. Dankó P. E. y otros. (1983): *Matemáticas superiores en ejercicios y problemas*. Parte I. Editorial MIR, Moscú.
7. Etgen, Gannet J. (1999): *Calculus one and several variables*. Editorial John Wiley & sons. España.
8. Fernández Muñiz, José L. (1983): *Análisis matemático.* Tomo III. Editorial Pueblo y Educación. La Habana.
9. Fraleigh, John B. (1990): *Calculus with analytic geometry*. Editorial Addison – Wesley publishing company. España.
10. Kitchen Jr., Joseph W. (1986): *Cálculo.* Mc. Graw – Hill. España.
11. Kudriávtsev, L. D. (1984): *Curso de análisis matemático*. Tomo II. Editorial MIR Moscú.
12. Larson, Roland E. y otros. (1995): *Calculus of a single variable*. Editorial D. C. Heath and company. España.
13. Lipschutz, Seymour. (1975): *Ejercicios y problemas de teoría de conjuntos y temas afines.* Editorial Pueblo y Educación. La Habana.
14. Manuel Álvarez, Eugenio. (1973): *Análisis matemático III. Funciones de varias variables*. Editorial MIR Moscú.
15. Maqueira, Raquel y otros. (2003): *Laboratorio de Matemática Superior.* Editorial Félix Varela. La Habana.
16. Martínez Puig, Eduardo y otros. (1990): *Matemática Superior.* Tomo I. Sin editorial.
17. Martínez, D. (1998): *Estudio del concepto de función en la formación de profesores*. Tesis de maestría. Universidad Central de Las Villas. Santa Clara.

18. **Pita Ruiz, Claudio. (1995): *Cálculo vectorial*. Editorial Prentice – Hall. España.**
19. **Ríbnikov, K. (1987): *Historia de la Matemática*. Editorial MIR Moscú.**
20. **Sáenz Quiroga, Eladio. (1987): *Matemáticas para Economistas*. Fondo de cultura económica. México.**
21. **Samuelson, Paul A. (1983): *Economía*. Mc. Graw – Hill. México.**
22. **Sánchez Fernández, Carlos. (1982): *Análisis matemático.* Tomo I. Editorial Pueblo y Educación. La Habana.**
23. **Santos Marín, N. (1988): *Sistema de habilidades lógicas relacionadas con los conceptos y los teoremas en la matemática de las ciencias técnicas*. Tesis para optar por el grado de Doctor en Ciencias de la Educación. Santa Clara, UCLV.**
24. **Schumpeter, Joseph A. (1994): *Historia del análisis económico*. Editorial Ariel. S.A. Barcelona.**
25. **Shipachev, V.S. (1991): *Fundamentos de las Matemáticas Superiores.* Editorial MIR. Moscú.**
26. **Spivak, M. (1970): *Cálculo infinitesimal*. Editorial Reverté, S.A. España.**
27. **Stein, K. Sherman. (1984): *Cálculo y geometría analítica*. 3ra. Edición. Mc. Graw – Hill. Madrid.**
28. **Sydsaeter, Knut. y Hammond, Peter. (1996): *Matemáticas para el Análisis Económico*. Editorial Prentice - Hall. España.**
29. **Valdés Castro, Concepción. (1983): *Análisis matemático*. Tomo III. Editorial Pueblo y Educación. LaHabana.**
30. **Varian, H. R. (1992): *Análisis microeconómico.* 3ra. Edición. Anthony Bosch Editor. España.**
31. **Yamane, Taro. (1962): *Mathematics for economists*. Editorial Prentice – Hall. España.**