La Cantuta
Fondo Editorial
Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

CÁLCULO INTEGRAL I
La Integral Indefinida

AUTORES

Gamaniel Domingo Gonzales Salvador
Oliver Eulogio Zavaleta Rime
Vivian Collahua Rupaylla
Mario Jaime Andia
Israel Coronado Huanaco

Universidad Nacional de Educación
Enrique Guzmán y Valle
Alma Máter del Magisterio Nacional

fondoeditorial.une.edu.pe

CÁLCULO INTEGRAL I
La Integral Indefinida

Gamaniel Domingo Gonzales Salvador

Oliver Eulogio Zavaleta Rime

Vivian Collahua Rupaylla

Mario Jaime Andia

Israel Coronado Huanaco

Lima - Perú
2024

ISBN: 978-612-4148-67-5

9 786124 148675

CÁLCULO INTEGRAL I
La Integral Indefinida

© **Gamaniel Domingo Gonzales Salvador**
https://orcid.org/0000-0002-9129-3800

Oliver Eulogio Zavaleta Rime
https://orcid.org/0009-0002-1414-2571

Vivian Collahua Rupaylla
https://orcid.org/0000-0001-5631-8921

Mario Jaime Andia
https://orcid.org/0000-0002-9026-3060

Israel Coronado Huanaco
https://orcid.org/0009-0008-7153-7565

Editada por:

© Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle (UNE) - **Fondo Editorial “La Cantuta”**
Dirección: Enrique Guzman y Valle N° 951, Lurigancho - Chosica 15472, Perú
ISNI: 0000 0000 8534 4267
fondoeditorial@une.edu.pe
Teléf. móvil: +51 999 140 920
Portal Web: https://www.une.edu.pe/

Primera edición digital: Diciembre 2024
Libro digital disponible en: https://fondoeditorial.une.edu.pe/

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú N° 2024-13883
ISBN: 978-612-4148-67-5
DOI: https://doi.org/10.54942/lacantuta.46

Libro resultado de Investigación y con revisión por pares doble ciego.
Sello editorial: Fondo Editorial (978-612-4148)

ÍNDICE

DEDICATORIA

A la Universidad Nacional De Educación Enrique Guzmán y Valle, Alma Máter del Magisterio Nacional; a la juventud estudiosa de la facultad de ciencias de las especialidades de Matemáticas e Informática que comparten divertidas experiencias formativas que los prepararán para convertirse en futuros líderes educativos y agentes de cambio. A nuestros seres queridos ausentes y presentes. Gracias al Dr. Daniel Chirinos Maldonado, Vicerrector de Investigación, por impulsar la publicación de este libro.

INTRODUCCION

Antes de la era cristiana y por muchos años, existían dos situaciones a resolver, el de la recta tangente a una curva y el área por debajo de una curva. El problema de encontrar la ecuación de la recta tangente fue resuelto con la derivada que se trata en los cursos del cálculo diferencial. El problema de la determinación del área bajo una curva se resuelve con las nociones del cálculo integral los cuales expondremos en el presente curso. Empezaremos en este primer texto presentando y hallando la antiderivada y la integral Indefinida, en el siguiente texto Calculo Integral II usaremos la antiderivada para el objetivo del cálculo integral como la Integral definida.

El propósito de este texto es brindar una introducción rápida en un inicio y seguir adelante con el curso de cálculo integral que responde a las siguientes preguntas: ¿Qué es? ¿Cuál es la relación entre ellos? apoyados en cursos de cálculo previos; además de brindarte las explicaciones necesarias y problemas "tipo" resueltos de forma clara y sencilla, sumado a las explicaciones dadas por el profesor en clase, te permitirán iniciarte rápidamente en la resolución de integrales de tipo algebraico, trigonométrico, exponencial y logarítmico; utilizando el formulario básico de integrales y el método de integración por cambio de variable para resolver aquellas integrales indirectas que obviamente no se ajustan a ninguna fórmula elemental convenida. Los procesos matemáticos utilizados para resolver integrales requieren de tus conocimientos básicos de álgebra y trigonometría, tus habilidades deductivas y un trabajo constante.

Diferenciación

$x^2 + 5$ 2x

Integración

CAPITULO I

1.1. LA INTEGRAL INDEFINIDA

1.1.1. DEFINICIÓN DE ANTIDERIVADA O INTEGRAL INDEFINIDA

Denominaremos a *F* una antiderivada, también primitiva o integral indefinida de f en el intervalo *I*, si $D_X F(x) = f_{(x)}$, es decir $F(x) = f_{(x)}$

Notación

La antiderivada lo denotaremos con la siguiente expresión:

$$\int f(s)\, dx = F(x) + C$$

Teorema

Si $F(x) = G\ (x)$, $\forall x \in (a, b)$ en consecuencia, existe una constante C tal que $F(x) = G\ (x) + C, para\ todo\ x \in (a, b)$

Demostración

Sea $H(x) = F(x) - G(x)$ definida en un intervalo (a, b) en consecuencia $H(x) = F(x) - G(x)$. Por Hipótesis tenemos, como $F(x) = G(x)$ entonces $H'^{(x)} = 0, \ \forall x \in (a, b)$.

Como *H* es derivable $para\ todo\ x \in (a, b)$, entonces, por el teorema del valor medio para derivada, $\exists x_0 \in (X, X_1) \subseteq (a, b)$ tal que $H'(x_0) = \frac{Hx_1 - H(x)}{x_1 - x}$.

Haciendo $H'^{(X_0)} = 0$ obtenemos $\frac{H(x_1) - H(x)}{x_1 - x} = 0$, es decir $H(x) = H(x_1) = C$.

Por consiguiente $F(x) - G(x) = C$

1.1.2. INTEGRACIÓN

Como habrás notado, la integración significa calcular la antiderivada o primitiva, que también es el proceso opuesto a la diferenciación. No es tan simple ya que requiere técnicas, que presentaremos a continuación.

En primer lugar, es esencial precisar que, siempre podremos hallar la antiderivada empleando fórmulas descubiertas por científicos tan igual como se usan en el cálculo de derivadas.

Formas y Fórmulas Estándares de Integrales

1. $\int dx = x + C$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\, ; n \neq -1$
3. $\int \frac{1}{x} dx = 1n|x| + C$
4. $\int e^x dx = e^x + C$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
6. $\int sen\, xdx = -\cos x + C$
7. $\int \cos xdx = sen\, x + C$
8. $\int sec^2\, xdx = tg\, x + C$
9. $\int csc^2\, xdx = -\cot gx + C$
10. $\int \sec x\, tg\, xdx = \sec x + C$
11. $\int \csc x \cot gdx = -\csc x + C$
12. $\int tg\, xdx = -ln|\cos x| + C = ln|\sec x| + C$
13. $\int \cot gxdx = ln|sen\, x| + C$
14. $\int \sec xdx = ln|\sec x + tg\, x| + C$
15. $\int \csc xdx = ln|\csc x - \cot gx| + C$
16. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = arcsen\left(\frac{x}{a}\right) + C$
17. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^{2-}a^2}} dx = \frac{1}{a} arctg\left(\frac{x}{a}\right) + C$
18. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}} dx = \frac{1}{a} arcsen\left(\frac{|x|}{a}\right) + C = \frac{1}{a} arccps\left(\frac{a}{|x|}\right) + C$
19. $\int senh\, xdx = \cosh x + C$
20. $\int \cosh xdx = senh\, x + C$

Las once primeras fórmulas se pueden comprender con facilidad del caso tomando en cuenta las que se proporcionaron para las derivadas.

Ejemplo 1

Determinar $\int x^2\, dx$

RESOLUCIÓN:

Para su solución emplearemos la fórmula 2

$$\int \boldsymbol{x^2 dx} = \frac{\boldsymbol{x^{2+1}}}{\boldsymbol{2+1}} + \boldsymbol{C} = \frac{\boldsymbol{x^3}}{\boldsymbol{3}} + \boldsymbol{C}$$

Ejemplo 2

Determinar $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

RESOLUCIÓN:

Del mismo modo que el ejemplo anterior emplearemos la fórmula 2

$$\int \frac{\boldsymbol{1}}{\sqrt{\boldsymbol{x}}} \boldsymbol{dx} = \int \boldsymbol{x^{-1/2} dx} = \frac{\boldsymbol{x^{-\frac{1}{2}+1}}}{\boldsymbol{-\frac{1}{2}+1}} + \boldsymbol{C}$$

Ejemplo 3

Calcular $\int \frac{1}{4+x^3} dx$

RESOLUCIÓN:

En este ejemplo empleamos la fórmula 17

$$\int \frac{1}{2^2 + x^2} dx = \frac{1}{2} arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

Para realizar la adición, sustracción de funciones y multiplicación por un escalar haremos uso de las siguientes propiedades.

1.1.3. PROPIEDADES DE INTEGRACIÓN

La Integral Indefinida cumple las siguientes propiedades de linealidad, esto es:

1. $\int [\boldsymbol{f(x) \pm g(x)}]\ \boldsymbol{dx} = \int \boldsymbol{f(x) dx} \pm \int \boldsymbol{g(x) dx}$

2. $\int \boldsymbol{kf\,(x)\, dx} = \boldsymbol{k} \int \boldsymbol{f\,(x) dx}$; $\boldsymbol{k \in R}$

Ejemplo 4

Calcular $\int \left(\frac{2}{x} + 3\ Sen\ x - 4\ e^{x}\right) dx$

<u>RESOLUCIÓN</u>:

Aplicando propiedades de adición, sustracción y otras fórmulas obtenemos:

$$\int \left(\frac{2}{x} + 3\ sen\ x - 4e^{x}\right) dx = \int \frac{2}{x} dx + \int 3\mathrm{senx} - \int 4e^{x}\ dx$$

$$= 2 \int \frac{1}{x} dx + 3 \int sen\ x dx - 4 \int e^{x} dx$$

$$= 2\ ln\ x - 3\ cos\ x - 4e^{x} + C$$

Para ejercicios y problemas más complejas se requerirá de técnicas más refinadas a fin de lograr el propósito.

CAPITULO II

2.1. TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

2.1.1. INTEGRACIÓN DIRECTA

En esta parte haremos uso de recursos algebraicos, propiedades y fórmulas para llegar encontrar las antiderivadas.

Ejemplo 1

Determinar $\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}dx$

<u>RESOLUCIÓN</u>:

Iniciamos por efectuar el cubo del binomio, simplificamos y aplicamos las propiedades en el desarrollo de la siguiente manera:

$$\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}dx = \int \frac{1-3x+3x^2-x^3}{x^{4/3}}dx$$

$$= \int \left[\frac{1}{x^{4/3}} - \frac{3x}{x^{\frac{4}{3}}} - \frac{3x^2}{x^{\frac{4}{3}}} - \frac{x^3}{x^{4/3}}\right] dx$$

$$= \int \left[x^{-4/3} - 3x^{-1/3} + 3x^{2/3} - x^{5/3}\right]dx$$

$$= \int x^{-4/3}\,dx - 3\int x^{-1/3}dx + 3\int x^{2/3}\,dx - \int x^{5/3}\,dx$$

$$= \frac{x^{-1/3}}{-1/3} - 3\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + 3\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} - \frac{\frac{8}{3}}{\frac{8}{3}} + C$$

$$= 3x^{-1/3} - \frac{9}{2}x^{\frac{2}{3}} + \frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}} + C$$

Ejercicios Propuestos 1.1

Halle las antiderivadas o la integral indefinida en:

1. $\int (3-x^2)^3\,dx$
2. $\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\ \,dx$
3. $\int \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}}dx$
4. $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx$
5. $\int \frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}dx$

2.1.2. INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN O CAMBIO DE VARIABLE

En muchos casos se presentan funciones compuestas, en las que ya no es posible resolver por medio de integración directa, pero puede ser que con un cambio de variable se transformen en integrales inmediatas.

En consecuencia, las fórmulas de integrales se pueden usar no sólo para "x" sino también para otras variables.

Ejemplo 1

Determinar $\int (1-x)^{30}\, dx$

<u>RESOLUCIÓN</u>:

Por ser un binomio de exponente treinta, no sería práctico obtener su desarrollo fácilmente. Por tanto, es conveniente realizar el cambio de variable t = 1 – x

Al realizar el cambio de variable, tenemos: $\frac{dt}{dx} = -1dx \rightarrow dx = -dt$

Ahora sustituyendo resulta: $\int t^{30}(-dt) = -\int t^{30}dt = -\frac{t^{31}}{31} + C$

Una vez realizada reintegración y reemplazado t se obtenemos que:

$\int (1-x)^{30}\, dx = -\frac{(1-x)^{31}}{31} + C$

Ejemplo 2

Determinar $\int \frac{sen\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

<u>RESOLUCIÓN</u>:

Realizando el cambio de variable: $t = \sqrt{x}$

Se obtiene: $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow dx = 2\sqrt{x}dx$

Al sustituir resulta: $\int \frac{sen\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{sen\ t}{\sqrt{x}}\ 2\sqrt{x}dt = 2\int sen\ tdt = 2(-cost) + C$

Al integrarlo y reemplazando "t" tenemos: $\int \frac{sen\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx = -2\cos\sqrt{x} + C$

Ejemplo 3

Determinar $\int x\sqrt{x-1}dx$

RESOLUCIÓN:

Por las características de la expresión cambiamos de variable: t = x – 1

Por el cual se obtiene: $\frac{dt}{dx} = 1 \rightarrow dx = dt$

Luego al sustituir resulta: $\int x\sqrt{x-1}dx = \int x\sqrt{t}dt$

Al no simplificarse x, reemplazaremos nuevamente.

Ahora despejamos del cambio de variable: x = t + 1

Entonces $\int x\sqrt{t}dt = \int (t+1)\sqrt{t}dt = \int \left(t\sqrt{t}+\sqrt{t}\right) dt = \int f^{3/2}dt + \int t^{1/2}dt$

$$= \frac{2}{5}\, t^{5/2} + \frac{2}{3} t^{3/2} + C$$

$$\int x\sqrt{x-1}dx = \frac{2}{5}(x-1)^{5/2} + \frac{2}{3}(x-1)^{3/2} + C$$

Ejemplo 4

Determinar $\int \left(\frac{4x-1 + arc\tan x - e^{arc\tan x}}{x^2+1}\right) dx$

RESOLUCIÓN:

Como tenemos un denominador para la expresión de 4 términos, separando las integrales, tenemos:

$$\int \frac{4x}{x^2+1}\, dx - \int \frac{1}{x^2+1}\, dx + \int \frac{arctanx}{x^2+1}\, dx - \int \frac{e^{arc\tan x}}{x^2+1} dx$$

A estas 4 integrales, lo calcularemos por separado.

1. $\int \frac{4x}{x^2+1}\, dx$. En esta integral para su solución haremos por cambio de variable $t = x^2 + 1$ de donde $\frac{dt}{dx} = 2x$, entonces $dx = \frac{dt}{2x}$

Reemplazando obtenemos: $\int \frac{4x}{x^2+1}\, dx = \int \frac{4x}{t}\frac{dt}{2x} = 2 \int \frac{1}{t} dt = 2\, ln|t| + C = 2ln|x^2+1| + C$

2. $\int \frac{1}{X^2+1} dx$. Esta integral es directa. $\int \frac{1}{x^2+1}\, dx = arctanx + C$

3. $\int \frac{arctg\, x}{x^2+1} dx$. Por su característica resolveremos por cambio de variable así t = arctg x, donde $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x^2+1}$, entonces $dx = (x^2+1)\, dt$.

sustituyendo, resulta:

$$\int \frac{arctanx}{x^2+1}\, dx = \int \frac{t}{x^2+1}(x^2+1)\, dt = \int tdt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{(arctanx)^2}{2} + C$$

4. $\int \frac{e^{arc\ tg\ x}}{x^2+1}\, dx$. El mismo cambio de variable nos sirve para esta integral entonces:

$$\int \left(\frac{4x - 1 + arc\tan x - \ e^{arc\tan x}}{x^2+1}\right) dx = 2\ln|x^2+1| - arc\tan x + \frac{(arc\tan x)^2}{2} e^{arc\tan x} + C$$

FINALMENTE:

$$\int \left(\frac{4x - 1 + arc\tan x - e^{arc\tan x}}{x^2+1}\right) dx = 2\ln|x^2+1| - arc\tan x + \frac{(arc\tan x)^2}{2} - e^{arc\tan x} + C$$

Ejemplo 5

Calcular $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}}$

<u>RESOLUCIÓN</u>:

Realizando el cambio de variable: $t = ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} 2x\right)$$

Del cambio de variable: $= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

Sustituyendo, resulta: $\int \frac{dt}{\sqrt{(1+x^2)\ln(x+\sqrt{1+x^2})}} = \int \frac{\sqrt{1+x^2}\,dt}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{t}}$

$$= \int t^{-1/2}dt = 2t^{1/2} + C$$

$$= \sqrt[2]{ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)} + C$$

Ejercicios Propuestos 1.2

1. $\int \frac{dx}{(5x-2)^{5/2}}$
2. $\int x\sqrt{2x-1dx}$
3. $\frac{dx}{sen^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}$
4. $\int \sqrt{1-sen(2x)}dx$
5. $\int \frac{x^2+1}{x-1}dx$
6. $\int \frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx$
7. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$
8. $\int \frac{arc\,tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx$
9. $\int \frac{1}{1-x^2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$
11. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$
12. $\int \frac{\ln x\,dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$
13. $\int \frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}$
14. $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx$
15. $\frac{sen\,x\,\cos x}{\sqrt{a^2\;sen^2\,x+b^2\;cos^2\,x}}$
16. $\int \frac{dx}{sen^2x\;\sqrt[4]{c\,tg\,x}}$
17. $\sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}}dx$
18. $\int \frac{2^x\;3^x}{9^x-x^2}dx$
19. $\int \frac{x\;dx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}$
20. $\int \frac{x-1}{\sqrt{4x^2-8x+3}}dx$

2.1.3. INTEGRACIÓN POR PARTES

Para tal integración usamos el producto de funciones: d (uv) = udx + vdu

Despejando y sacando la integral, se obtiene: $udv \;= d(uv) - vdu$

$$\int udv \;=\; \int d\,(uv) - \int vdu$$

En conclusión, la fórmula a usarse en la integración por partes es el siguiente:

$$\boxed{\int udv \;=\; uv - \int vdu}$$

Ejemplo 1

Calcular $\int x\, e^x \ dx$

RESOLUCIÓN:

Haciendo u = x y dv = e^x dx

Integrando, resulta: $\int \overbrace{x}^{u} \overbrace{e^x \ \ dx}^{dv} = \overbrace{x}^{u} \overbrace{e^x}^{v} - \int \overbrace{e^x}^{v} \overbrace{dx}^{du}$

$$= x\, e^x - e^x + C$$

Ejemplo 2

Calcular $\int (2x^2 + 3x - 5)\, sen\, x \ dx$

RESOLUCIÓN:

Haciendo $u = 2x^2 + 3x - 5$ y $dv = sen\, x\, dx$.

Entonces $du = (4x + 3)dx$ y $v = \int sen \ xdx = -\cos x$

por lo tanto, integrando tenemos:

$$\int \overbrace{(2x^2 + 3x - 5)}^{u} \overbrace{sen\, x\, dx}^{dv} = \overbrace{(2x^2 + 3x - 5)}^{u} \overbrace{(-\cos x)}^{v} - \int \overbrace{(-\cos x)}^{v} \overbrace{(4x + 3)}^{du}$$

= - $(2x^2 + 3x - 5)\cos x + \int (4x + 3)\cos x dx$

En la integral $\int (4x + 3)$ cos xdx aplicamos y realizamos por partes.

Haciendo u = 4x + 3 y dx = cos x dx. obtenemos du = 4dx y $v = \int \cos x dx = sen\, x$

Por lo tanto: $\int (4x + 3)\cos x dx = (4x + 3)\, sen\, x - \int sen\, x\, (4dx)$

= (4x + 3) sen x + 4 cos x

Finalmente:

$$\int (2x^2 + 3x - 5)\, sen\, x\, dx = -(2x^2 + 3x - 5)\cos x + (4x + 3)\, sen\, x + 4\cos x + C$$

Ejemplo 3

Hallar $\int e^x \cos x dx$

RESOLUCIÓN:

Haciendo $u = e^x$ y $dv = \cos x\, dx$

Obtenemos $du = e^x\, dx$ y $v = \int \cos\ x dx = sen\ x$

Por tanto: $\int e^x \cos x dx = e^x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\ e^x\, dx$

La integral $\int \operatorname{sen} x\, e^x dx$ se calcula por parte. Hacemos $u = e^x$ y $dv = \operatorname{sen} x\, dx$.

Entonces $du = e^x\, dx$ y $v = \int \operatorname{sen} x dx = -\cos x$.

Por lo tanto $\int e^x \operatorname{sen} x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$

Finalmente:

$$\int e^x \cos x dx = e^x \operatorname{sen} x - \left[-e^x \cos x + \int e^x \cos x dx\right]$$

$$\int e^x \cos x dx = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx$$

Nótese que la última primera y la última integral son semejantes; entonces, al despejar obtenemos

$$2\int e^x \cos x dx = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x$$

$$\int e^x \cos x dx = \frac{e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x}{2} + C$$

Ejemplo 4

Hallar $\int x \ln x dx$

RESOLUCIÓN:

Haciendo $u = \ln x$ y $dv = x\, dx$ (¿puedes decir por qué?)

Obtenemos $du = \frac{1}{x}\, dx$ y $v = \int x\, dx = \frac{x^2}{2}$

Por consiguiente:

$$\int x \ln x dx = (\ln x)\left(\frac{x^2}{2}\right) - \int \frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{x}\, dx\right)$$

$$= \frac{1}{2}\, x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\, x^2 \ln x - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right) + C$$

Ejemplo 5

Determinar $\int ln\, xdx$

RESOLUCIÓN:

Del mismo modo haciendo $u = \ln x$ y $dv = dx$. Obtenemos $du = \frac{1}{x}dx$ y $v = \int dx = x$

Por tanto:

$$\int \ln xdx = x \ln x - \int x\left(\frac{1}{x}dx\right)$$

$$= x \ln x - x + C$$

Ejemplo 6

Calcular $\int x\; arctg\, x\; dx$

RESOLUCIÓN:

Haciendo $u = arctg\, x$ y $dv = xdx$, obtenemos: $du = \frac{1}{1+x^2}dx$ y $v = \frac{x^2}{2}$

Por tanto:

$$\int x\; arctg\, x\; dx = (arctg\, x)\left(\frac{x^2}{2}\right) - \int \frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{1+x^2}dx\right)$$

$$\frac{1}{2}x^2\, arctg\, x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x^2+1}dx$$

En esta última integral dividimos el numerador entre el denominador, el cual resulta: $\frac{x^2}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}$

Al reemplazar se obtiene: $\int \frac{x^2}{x^2+1}dx = \int\left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)dx = \int dx - \int \frac{1}{x^2+1}dx = x - arctg\, x$

Y concluimos en: $\int x\; arctg\; xdx = \frac{1}{2}x^2 arctg\, x - \frac{1}{2}[x - arctg\, x] + C$

Ejercicios propuestos 1.3

En cada un de los ejercicios encuentre las antiderivadas:

1. $\int x\, e^{3x}\, dx$	11. $\int x(arctg\ x)^2\ dx$
2. $\int (x+1)\, e^{2x}\, dx$	12. $\int e^{\sqrt{x}}\ dx$
3. $\int (2x-1)\, sen\ 3\ xdx$	13. $\int ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) dx$
4. $\int x\ sen(3x-1)\, dx$	14. $\int arcsen\ x\ dx$
5. $\int x^2\ e^{-2x} dx$	15. $\int arctg\ x\ dx$
6. $\int (x^2-3x+2)e^{2x}\, dx$	16. $\int arc\tan\left(\sqrt{x}\right) dx$
7. $\int (2x-1)\ln x\, dx$	17. $\int \cos(\ln x) dx$
8. $\int \sqrt{x}\ ln^2\, x\ dx$	18. $\int sen\ \sqrt{x}\ dx$
9. $\int \sqrt{x}\ln x\, dx$	19. $\int sen\ (\ln x) dx$
10. $\int \frac{x\cos x\ dx}{sen^2 x}$	20. $\int sen\ x \ln(tg\ x) dx$

CAPITULO III

3.1. INTEGRACIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.

Para integrar funciones trigonométricas que no sean directas, se utilizan las identidades trigonométricas que a su vez le clasificaremos de la manera siguiente:

TIPO I: Integrales de la forma: $\int sen^n\, x\, dx$ **o** $\int \; cos^n\, x\, dx$

1. Si "n" es IMPAR, usaremos:

$$sen^2x = 1 - cos^2x$$

$$cos^2x = 1 - sen^2x$$

2. Si "n" es PAR, usaremos:

$$sen^2x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$cos^2x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

Ejemplo 1

Hallar $\int cos^2\, x\, dx$

RESOLUCIÓN:

Como el exponente es dos, entonces usamos la regla para la potencia par:

$$\int cos^2\, x\, dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int 1dx + \int \cos 2x \;\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[x + \frac{sen\; 2x}{2}\right] + C$$

Ejemplo 2

Hallar $\int sen^3\, x\, dx$

RESOLUCIÓN:

Como el exponente es tres, usamos la regla para la potencia impar:

$$\int sen^3 x\, dx = \int sen^2 x\, sen\, x\, dx$$
$$= \int (1-\cos^2 x) sen\, x\, dx$$
$$= \int sen\, xdx - \int cos^2 x\, sen\, x\, dx$$

En esta última línea, la primera integral es directa y la segunda se obtiene por sustitución.

1. $\int sen\, x\, dx = -\cos x$
2. $\int cos^2\ x\, sen\, x\, dx$ cambiando de variable $t = \cos x$ obtenemos $dt = -sen\, x\, dx$

Reemplazando resulta: $\int cos^2 x\, sen\, x\, dx = \int t^2(-dt) = -\frac{cos^3 x}{3}$

Finalmente: $\int sen^3 x\, dx = -\cos x + \frac{cos^3 x}{3}\ C$

Ejemplo 3

Calcular $\int cos^4\, x\, dx$

RESOLUCIÓN:

Para el presente caso usamos la regla para la potencia par:

$$\int cos^4\, x\, dx = \int (cos^2 x)^2\, dx$$
$$= \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx$$
$$= \frac{1}{4}\left[\int 1dx + \int 2\cos 2xdx + \int cos^2 2xdx\right]$$
$$= \frac{1}{4}\left[x + 2\frac{sen\ 2x}{2}\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right) dx\right]$$
$$= \frac{1}{4}\left[x + sen\ 2x + \frac{1}{2}\left(\int 1dx + \int \cos 4x\, dx\right)\right]$$
$$= \frac{1}{4}\left[x + sen\ 2x + \frac{1}{2}\left(x + \frac{sen\ 4x}{4}\right)\right] + C$$

TIPO II: Integrales de la forma: $\int sen^m\, x\, cos^n\ x\, dx$

1. Si m ó n son impares

Ejemplo

Determinar el valor de: $\int sen^3\, x\, cos^{-4} x\, dx$

RESOLUCIÓN:

Se observa que el exponente del seno es impar, entonces procedemos de la siguiente manera:

$$\int sen^3\, x\, cos^{-4}x\, dx = \int sen^2\, x\, sen\, x\, cos^{-4}x\, dx$$

$$= \int (1 - cos^2 x)\; sen\, x\, cos^{-4}x\, dx$$

$$= \int (\cos x)^{-4}\; sen\, x\, dx - \int (\cos x)^{-2}\; sen\, x\, dx$$

En la línea anterior se aprecia que ambas integrales se resuelven por sustitución. Haciendo el cambio de variable $t = \cos x$ de donde $dt = -sen\, x\, dx$, se obtiene

$$\int (\cos x)^{-4}\; sen\, x\, dx - \int (\cos x)^{-2}\; sen\, x\, dx = \int t^{-4}(-dt) - \int t^{-2}(-dt)$$

$$= -\frac{t^{-3}}{-3} + \frac{t^{-1}}{-1} + C$$

$$= -\frac{cos^{-3}x}{3} - cos^{-1}x + C$$

---

2. **Si** m **y** n **son pares**

Ejemplo

Calcular $\int sen^2\, x\, cos^4 x\, dx$

RESOLUCIÓN:

Como ambos son pares, entonces:

$$\int sen^2\, x\, cos^4 x\, dx = \int sen^2\, x\, (cos^2 x)^2\, dx$$

$$= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1 - \cos 2x)(1 + 2\cos 2x + cos^2 2x)dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1 + \cos 2x - cos^2 2x - cos^3 2x)dx$$

$$= \frac{1}{8}\left[\int 1dx + \int \cos 2x\, dx - \int cos^2 2x\, dx - \int cos^3 2x\, dx\right]$$

Observamos que las dos últimas integrales son trigonométricas entonces:

$$= \frac{1}{8}\left[x + \frac{sen\, 2x}{2} - \int \left(\frac{1 + \cos 4x}{2}\right) dx - \int cos^2 2x \cos 2x\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[x + \frac{sen\, 2x}{2} - \frac{1}{2}\left(\int 1dx + \int \cos 4x\, dx\right) - \int (1 - sen^2 2x) \cos 2x\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[x + \frac{sen\ 2x}{2} - \frac{1}{2}\left(x + \frac{sen\ 4x}{4}\right) - \left(\int \cos 2x\ dx - \int sen^2 2x \cos 2x\ dx\right)\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[x + \frac{sen\ 2x}{2} - \frac{x}{2} - \frac{sen\ 4x}{8} - \left(\frac{sen\ 2x}{2} - \frac{sen^3\ 2x}{6}\right)\right] + C$$

Finalmente:

$$\int sen^2\ x\ cos^4\ x\ dx = \frac{1}{8}\left[\frac{x}{2} - \frac{sen\ 4x}{8} + \frac{sen^3\ 2x}{6}\right] + C$$

TIPO III: Integrales de la forma:

$$\int sen\ mx \cos nx\ \ dx, \quad \int sen\ mx\ sen\ nx\ dx\ , \int \cos mx \cos nx\ dx$$

Para estos tipos de integrales se recomienda usar, las siguientes identidades:

$$sen\ mx\ \ \cos nx = \frac{1}{2}[sen(m+n)x + sen(m-n)x]$$

$$sen\ mx\ \ \cos nx = -\frac{1}{2}[cos(m+n)x - cos(m-n)x]$$

$$cos\ mx\ \ \cos nx = \frac{1}{2}[cos(m+n)x + cos(m-n)x]$$

Ejemplo 1

Calcular $\int sen\ 2x \cos 3x\ \ dx$

<u>RESOLUCIÓN:</u>

Usando la identidad trigonométrica antes mencionada y simplificando obtenemos que:

$$\int sen\ 2x \cos 3x\ \ dx = \int \frac{1}{2}[sen(2+3)x + sen(2-3)x]dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int sen5x\ dx + \int sen(-x)dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos 5x}{5} + \cos x\right] + C$$

Ejemplo 2

Calcular $\int sen\ x\ sen\ 2x\ sen\ 3x\ dx$

<u>RESOLUCIÓN:</u>

Agrupando y aplicando identidades, tenemos:

$$\int sen\, x\; sen\, 2x\; sen\, 3x\, dx = \int (sen\, x\; sen\, 2x) sen\, 3x\, dx$$

$$= \int -\frac{1}{2}[cos(1+2)x - cos(1-2)x] sen\, 3x\, dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int [cos3x\; sen\, 3x - cos(-x) sen\, 3x]\, dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\int sen\, 3x \cos 3x\, dx - \int sen\, 3x \cos x\, dx\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\int \frac{1}{2}[sen\, 6x + sen\, 0x] - \int \frac{1}{2}[sen\, 4x + sen\, 2x]\, dx\right]$$

$$= -\frac{1}{4}\left[\int sen\, 6x\, dx - \int sen\, 4x\, dx - \int sen\, 2x\, dx\right]$$

$$= -\frac{1}{4}\left[-\frac{\cos 6x}{6} + \frac{\cos 4x}{4} + \frac{\cos 2x}{2}\right] + C$$

TIPO IV: Integrales de la forma:

$$\int tg^n\, x\, dx \quad Y \quad \int \cot g^n\; x\, dx$$

En este tipo de integral se recomienda usar las identidades siguientes:

$$tg^2\, x = sec^2\, x - 1$$

$$\cot g^2\; x = csc^2\, x - 1$$

Ejemplo 1

Calcular $\int tg^3 x\, dx$

RESOLUCIÓN:

$$\int tg^3 x\, dx = \int tg^2\, xt\; gx\, dx$$

$$= \int (sec^2\, x - 1) tg\, x\, dx$$

$$= \int sec^2\, x\; tg\, x\, dx - \int tg\, x\, dx$$

La primera integral es por sustitución mientras que la segunda integral es directa:

$$t = tg\, x \;\; de\; donde \;\; dt = sec^2\, x\, dx$$

Finalmente:

$$\int tg^3 x\, dx = \int tdt - (-\ln|\cos x|)$$

$$= \frac{tg^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C$$

Ejemplo 2

Calcular $\int cot\ \ g^4\ x\ dx$

RESOLUCIÓN:

Usando la identidad trigonométrica y las propiedades, obtenemos que:

$$\int cot^4 x\ \ dx\ = \int cot\ g^2 x\ cot\ g^2 x\ \ dx$$

$$= \int cot\ g^2 x\ (csc^2 x\ -\ 1)\ dx$$

$$= \int cot\ g^2 x\ csc^2 x\ dx\ -\ \int cot\ g^2 x\ dx$$

Se puede observar que la primera integral es por sustitución y la segunda se resuelve por identidad trigonométrica quedando del siguiente modo:

$$\int \cot g^4\ x\ dx = \int (\cot gx)^2\ \ csc^2 x\ dx - \int \cot g^2\ x\ dx$$

$$= -\frac{\cot g^3\ x}{3} - \int (csc^2\ x - 1)\ dx$$

$$= -\frac{\cot g^3\ x}{3} - \int csc^2\ x\ dx + \int dx$$

$$= -\frac{\cot g^3\ x}{3} + \cot gx + x + C$$

TIPO V: Integrales de la forma:

$$\int tg^m x\ sec^n x\ dx\ \ \boldsymbol{y}\ \ \int cot\ g^m x\ csc^n x\ dx$$

Caso 1. Si el exponente de la secante o cosecante "n" es par, se realiza con el diferencial de la tangente o cotangente.

Ejemplo 1

Hallar $\int tg^{\frac{-3}{2}} x\ sec^4\ x\ dx$

RESOLUCIÓN:

$$\int tg^{\frac{-3}{2}} x\ sec^4\ x\ dx = \int tg^{\frac{-3}{2}} x\ sec^2\ x\ sec^2 x\ dx$$

$$= \int tg^{\frac{-3}{2}}x\,(tg^2x+1)sec^2\,x\,dx$$

$$= \int tg^{\frac{1}{2}}x\,sec^2\,x\,dx + \int tg^{\frac{-3}{2}}x\,sec^2\,x\,dx$$

Las dos integrales últimas se resuelven por sustitución:

$$\int tg^{\frac{-3}{2}}x\,sec^4\,x\,dx = \int (tg\,x)^{\frac{1}{2}}\;sec^2x\,dx + \int (tg\,x)^{\frac{-3}{2}}\;\;sec^2x\,dx$$

$$=$$

$$= \frac{tg^{\frac{3}{2}}x}{\frac{3}{2}} + \frac{tg^{\frac{-1}{2}}x}{-\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3}\,tg^{\frac{3}{2}}\,x - 2tg^{\frac{-1}{2}}\;x + C$$

Caso 2. Si el exponente de la tangente o cotangente "m" es impar, se realiza con el diferencial de la secante o cosecante.

Ejemplo 1

Hallar $\int tg^3x\,sec^{\frac{-1}{2}}\,x\,dx$

<u>RESOLUCIÓN:</u>

Descomponemos para obtener el diferencial de la secante

$$\int tg^3x\sec^{-\frac{1}{2}}x\,dx \;=\; \int tg^2x\sec^{-\frac{3}{2}}x\,(\sec x\,tg\,x\,dx)$$

En seguida resolviendo, obtenemos que:

$$\int tg^3x\sec^{-\frac{1}{2}}x\,dx \;=\; \int(\sec^2 x - 1)\sec^{-\frac{3}{2}}x\,(\sec x\,tg\,x\,dx)$$

$$= \int \sec^{\frac{1}{2}}x\,(\sec x\,tg\,x\,dx) - \int \sec^{-\frac{3}{2}}x\,(\sec x\,tg\,x\,dx)$$

estas últimas integrales se resuelven mediante la sustitución:

$$\int tg^3x\sec^{-\frac{1}{2}}x\,dx \;=\; \int(sec\,x)^{\frac{1}{2}}(\sec x\,tg\,x\,dx) - \int(sec\,x)^{\frac{-3}{2}}(\sec x\,tg\,x\,dx)$$

$$= \frac{2}{3}\sec^{\frac{3}{2}}x +\; 2\sec^{-\frac{1}{2}}x$$

Ejemplo 2

Calcular $\int sec^3x\, dx$

RESOLUCIÓN:

Esta integral lo resolveremos por partes

$$\int \sec^3 x\, dx = \int \sec x \sec^2 x\, dx$$

Tomando $u = \sec x$ obtenemos que $du = \sec x\, tg\, x\, dx$ y si tomando $dv = sec^2x\, dx$ obtenemos $v = tg\, x$

Luego aplicando la integración se tiene:

$$\int sec^3x\, dx = sec\, x\, tg\, x - \int tg^2x\, sec\, xdx$$

$$= \sec x\, tg\, x - \int tg^2x \sec x\, dx$$

$$= \sec x\, tg\, x - \int (\sec^2 x - 1) \sec x\, dx$$

$$= \sec x\, tg\, x - \int \sec^3 x\, dx + \int \sec x\, dx$$

$$\int \sec^3 x\, dx = \sec x\, tg\, x - \int \sec^3 x\, dx + \ln|\sec x + tg\, x|$$

Finalmente, al despejar la integral buscada obtenemos:

$$2\int \sec^3 x\, dx = \sec x\, tg\, x + \ln|\sec x + tg\, x|$$

$$\int \sec^3 x\, dx = \frac{1}{2}\sec x\, tg\, x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + tg\, x| + C$$

Ejercicios propuestos 1.4

En los ejercicios que a continuación se presentan encuentra las antiderivadas:

1. $\int (2 - 3cos^2 2x)\, dx$	11. $\int \tan^5 x\, dx$
2. $\int sen^3 3x\, dx$	12. $\int \cot^6 x\, dx$
3. $\int \cos^6 x\, dx$	13. $\int \tan^2 5\, x\, dx$
4. $\int \cos^5 x \sqrt{senx}\, dx$	14. $\int tg^5x \sec^{-\frac{3}{2}} x\, dx$
5. $\int sen\, 3x\, sen\, 5x\, dx$	15. $\int \frac{dx}{(sen^2x \cos^2 x)}$

6. $\int sen\left(\frac{x}{3}\right)\cos\left(\frac{2x}{3}\right)dx$	16. $\int \frac{dx}{Sen\left(\frac{x}{2}\right)Cos^3\left(\frac{x}{2}\right)}$
7. $\int sen\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)dx$	17. $\int \frac{dx}{sen^2x\cos^4x}$
8. $\int \cos x\cos^2 3x\,dx$	18. $\int \frac{sen\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{sen\,x\cos x}dx$
9. $\int sen^3(2x)\cos^7(2x)\,dx$	19. $\int \frac{dx}{sen^2x\cos x}$
10. $\int \cos x\cos 2x\cos 3x\,dx$	20. $\int \csc^3 x\,dx$

3.2. INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA.

En esta parte, para resolver situaciones convertiremos las integrales dadas en directas mediante una sustitución trigonométrica. Generalmente se presenta en forma de radicales con suma o diferencia de cuadrados, en tal caso recomendamos:

$$Si\ tenemos\ \sqrt{a^2-x^2}\quad sustituir\ \ x=a\,sen\,t$$

$$Si\ tenemos\ \sqrt{a^2+x^2}\quad sustituir\ \ x=a\,tg\,t$$

$$Si\ tenemos\ \sqrt{x^2-a^2}\quad sustituir\ \ x=a\sec t$$

Ejemplo 1

Calcular $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx$

Resolución:

haciendo $x=2\text{sent}$ obtenemos que $dx=2\cos t dt$

Luego reemplazamos y operamos del siguiente modo:

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx=\frac{\sqrt{4-(2sent)^2}}{(2sent)^2}2costdt$$

$$=\int \frac{\sqrt{4-4sen^2t}}{4sen^2t}2costdt$$

$$=\int \frac{\sqrt{4(1-sen^2t)}}{2sen^2t}costdt$$

$$=\int \frac{\sqrt{4cost^2t}}{2sen^2t}costdt$$

$$=\int \frac{2cost}{2sen^2t}costdt$$

$$=\int \frac{Cost}{sen^2t}costdt$$

$$=\int cotg^2\, tdt$$

$$=\int (csc^2\mathbf{t}-\mathbf{1})dt$$

$$=\int cotgcsc^2tdt-\int dt$$

$$=-cotgt-t+C$$

Ejemplo 2

Calcular $\int \frac{x^3dx}{(x^2+9)^{3/2}}$

<u>Resolución:</u>

Haciendo $x=tgt$ obtenemos que $dx=3\boldsymbol{sec^2t\,dt}$

Luego reemplazamos y resolvemos obteniendo:

$$\int \frac{x^3dx}{(x^2+9)^{3/2}}=\int \frac{(3tgt)^3}{((3tgt)^2+9)^{3/2}}\mathbf{3sec^2tdt}$$

$$=\int \frac{27tg^3t3sec^2t}{(\sqrt{9tg^2t+9})^2+9)^3}\boldsymbol{dt}$$

$$=\int \frac{81tg^3tsec^2t}{(3sect)^3}\boldsymbol{dt}$$

$$=\int \frac{81tg^3tsec^2t}{(27sec)^3t}\boldsymbol{dt}$$

$$=\int \mathbf{3}\frac{tg^3t}{sect}\boldsymbol{dt}$$

$$=3\int \frac{tgt\; tg^2t}{sect}dt$$

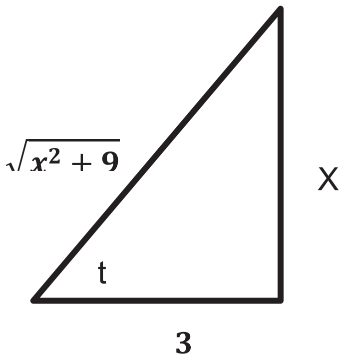
$$=3\int \frac{tgt(\,sec^2t-1)}{sect}dt$$

$$=3[\int \frac{tgt\; sec^2t}{sect}dt-\int \frac{tgt}{sect}dt]$$

$$=3[\int sect\;\; tg\; tdt-\int sen\; tdt]$$

$$=3[sect+cost]\text{+C}$$

Por trigonometría y el cambio de variable tan(t) =$\frac{x}{3}$ obtenemos el siguiente triangulo:



Por tanto, sect=$\frac{\sqrt{x^2+9}}{3}$ y cost=$\frac{3}{\sqrt{x^2+9}}$

Concluimos en lo siguiente:

$$\int \frac{x^3dx}{(x^2+9)^{3/2}} = [\frac{\sqrt{x^2+9}}{3} + \frac{3}{\sqrt{x^2+9}}] + C$$

EJEMPLO 3

Hallar $\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x^3}dx$

<u>Resolución:</u>

Haciendo x=4sect obtenemos dx = 4sect tg tdt

Luego reemplazando y resolviendo resulta:

$$\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x^3}dx = \int \frac{\sqrt{(4sect)^2-16}}{(4sect)^3} 4\text{sect tg tdt}$$

$$=\int \frac{\sqrt{16sec^2t-16}}{4^3sec^3t} \quad 4\text{sect tg tdt}$$

$$= \int \frac{\sqrt{16(sec^2t-1}}{4^2sec^2t} \text{ tg tdt}$$

$$=\int \frac{\sqrt{16tg^2t}}{4^2sec^2t} \text{ tg tdt}$$

$$=\int \frac{4tgt}{4^2sec^2t} \text{ tg tdt}$$

$$=\int \frac{tg^2t}{4\,sec^2t} \text{ tg tdt}$$

$$=\frac{1}{4}\int \frac{\frac{sen^2t}{cos^2t}}{\frac{1}{cos^2t}}$$

$$=\frac{1}{4}\int sen^2tdt$$

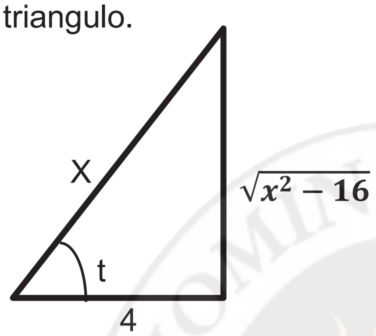
$$=\frac{1}{4}\int (\frac{2-cos\,2t}{2})dt$$

$$=\frac{1}{8}\left[\int 1dt - \int \cos 2tdt\right]$$

$$=\frac{1}{8}\left[t - \frac{sen\ 2t}{2}\right]+C$$

$$=\frac{1}{8}\left[t - \frac{2sen\ t\cos t}{2}\right]+C$$

De la misma manera por trigonometría y el cambio de variable sect $=\frac{x}{4}$ obtenemos el siguiente triangulo.



En consecuencia, t=arc sec $\frac{x}{4}$ **,sen t=** $\frac{\sqrt{x^2-16}}{x}$ $y \cos t = \frac{4}{x}$

Finalmente:

$$\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x^3}dx = \frac{1}{8}\left[t - \frac{2sen\ t\cos t}{2}\right]+C$$

$$=\frac{1}{8}\left[arc\ sec\ \frac{x}{4} - \frac{\sqrt{x^2-16}}{x}\ \frac{x}{4}\right]+C$$

En otros ejercicios de integrales, a veces es necesario completar cuadrado primero, luego aplicar la fórmula:

EJEMPLO 4

Determinar $\int \sqrt{5-4x-x^2dx}$

<u>**Resolución:**</u>

En esta situación primero completaremos cuadrado, luego realizamos una simple sustitución algebraica y finalmente la sustitución trigonométrica del siguiente modo:

$$\int \sqrt{5-4x-x^2dx} = \int \sqrt{5-(x^2+4x+4)+4\ dx}$$

$$=\int \sqrt{9-(x+x)^2dx}$$

Seguidamente si hacemos *u=x+2 entonces du=dx y* la integral resultará así:

$$\int \sqrt{9-u^2\ du}$$

Aplicando la sustitución trigonométrica adecuada *u=3sent* resulta du=*3cos tdt*. Luego reemplazando y siguiendo con las operaciones obtenemos:

$$\int \sqrt{9-u^2\, du} = \int \sqrt{9-9sen^2\, t 3\cos tdt}$$

$$= \int 3\cos t\, 3\cos tdt$$

$$= 9\int \cos^2 tdt$$

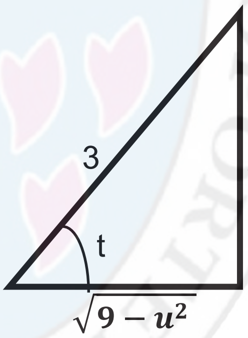
$$=9\int \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt$$

$$=\frac{9}{2}\left[\int 1dt + 9\int \cos 2\, tdt\right]$$

$$=\frac{9}{2}\left[t+\frac{2sen\, t\cos t}{2}\right]+C$$

$$=\frac{9}{2}\left[t+\frac{sen\, 2t}{2}\right]+C$$

Haciendo el cambio de variable sen t= $\frac{u}{3}$ se obtiene el siguiente triángulo:



Luego podemos decir que t=arc sen$\frac{u}{3}$ **y cos t =** $\frac{\sqrt{9-u^2}}{3}$

Por tanto,

$$\int \sqrt{9-u^2}\, du = \frac{9}{2}[t + sen\, t\, cost\,] + C$$

$$= \frac{9}{2}[\text{ arc sen }(\frac{u}{3}) + \frac{u}{3}\frac{\sqrt{9-u^2}}{3}\,] + C$$

Finalmente, como u=x+2, al reemplazar y operar resulta:

$$\int \sqrt{9-u^2}\,du = \frac{9}{2}[\text{arc sen }(\frac{u}{3}) + \frac{u\sqrt{9-u^2}}{9}] + C$$

$$= \frac{9}{2}[\text{arc sen }(\frac{x+2}{3}) + \frac{(x+2)\sqrt{9-(x+2)^2}}{9}] + C$$

EJERCICIOS PROPUESTOS 1.5

En los ejercicios que a continuación se presenta encuentre las antiderivadas de:

1. $\int x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$	**11.** $\frac{dx}{\sqrt{(1+e^{2x}}}$
2. $\frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}})$	**12.** $\frac{sec^2 x dx}{\sqrt{(tg^2\,x+4tg\,x+1}}$
3. $\frac{x^2}{(1-x^2)^{3/2}})\,dx$	**13.** $\frac{sen\,x\cos x dx}{\sqrt{(9+sen^4\;x}}$
4. $\frac{x^2}{\sqrt{9-X^2}})\,dx$	**14.** $\frac{x\,arc\,tg\,x dx}{\sqrt{(1+x^4}}$
5. $\frac{dx}{x\sqrt{x^2+9}}$	**15.** $\frac{x\,e^{arc\tan x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx$
6. $\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}}$	**16.** $\int x^2\,arc\cos x\,dx$
7. $\frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}$	**17.** $\frac{in\,x\,dx}{x\sqrt{(1-4\,in\,x-in^2 x}}$
8. $\frac{dx}{\sqrt{x^2-2}}$	**18.** $\frac{x\,dx}{(1+x^2)\sqrt{(1-x^4}}$
9. $\frac{x^2 dx}{\sqrt{4x-x^2}}$	**19.** $\frac{x^3 dx}{x^{4-}x^2+2}$
10. $\frac{dx}{\sqrt{(x^2+4x+13)^3}}$	**20.** $\frac{x^{11}dx}{x^{8-}x^4+2}$

CAPITULO IV

4.1. INTEGRACION DE FUNCIONES RACIONALES.

Si la función racional $\frac{p(x)}{q(x)}$ es una fracción propia, es decir, el grado del numerador es menor que el grado del denominador, recomendamos usar el método de fracciones parciales.

REGLA GENERAL.

Si $\frac{p(x)}{q(x)}$ es una fracción propia. entonces:

1. Podemos expresar en tantas fracciones parciales como factores tenga el denominador q(x).
2. Cada uno de los denominadores de las fracciones parciales es un factor de q(x).
3. El numerador de cada fracción parcial será un polinomio con un grado menor a su denominador.

Se presentan varios casos, veamos:

CASO I. q(x) se descompone en factores lineales diferentes.

Ejemplo:

Calcular. $\int \frac{5x+3}{x^3-2x^2-3x}\,dx$

<u>RESOLUCION:</u>

Nótese que nos piden calcular la integral de una fracción propia (el grado del numerador es menor que el grado del denominador). Por lo que empezaremos factorizando el denominador

$$\frac{5x+3}{x^3-2x^2-3x}=\frac{5x+3}{x(x^2-2x-2)}=\frac{5x+3}{x(x-3)(x+1)}$$

Se puede observar que, al factorizar, el denominador quedó expresada en 3 factores lineales diferentes, entonces sus fracciones parciales quedarán expresadas de la forma siguiente.

$$\frac{5x+3}{x(x-3)(x+1)}=\frac{A}{X}+\frac{B}{X-3}+\frac{C}{X+1}$$

Seguidamente encontramos los valores A, B Y C

Al multiplicar por x(x-3) (x+1) a cada uno de los términos resulta:

5x+3=A(x-3) (x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-3)

Una forma segura y rápida es evaluar la última expresión en las raíces de q(x) así:

Si x=0, se obtiene:

5(0) +3= A (0-3) (0+1) + B (0) (0+1) + C (0) (0-3)

3=-3A

A=-1

Si x=3, se obtiene:

5(3) +3 = A (3-3) (3+1) + B (3) (3+1) + C (3) (3-3)

18 = 128

B = 3 / 2

Si x = -1, se obtiene:

5(-1) +3= A (-1-3) (-1+1) + B (-1) (-1+1) + C (-1) (-1-3)

-2=4C

C=-1/2

Luego al integrar resulta:

$$= \int \frac{5x+3}{x^3-2x^2-3x}\,\mathrm{dx} = \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{3/2}{x-3} + \frac{-1/2}{x+1}\right)dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{x}\,dx + \frac{3}{2}\int \left(\frac{1}{x-3}\,dx - \frac{1}{2} = \int \frac{1}{x+1}dx\right.\right.$$

$$= -\ln|X| + \frac{3}{2}\ln|x-3| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C$$

CASO II. **En q(x) hay factores lineales repetidos**.

Ejemplo:

Calcular $\int \frac{3x^2-8x+13}{(x+3)(x-1)^3}\,\boldsymbol{dx}$

Resolución:

Como el denominador ya está factorizado, entonces las fracciones parciales a integrar sería de la forma:

$$\frac{\mathbf{3x^2-8x+13}}{\mathbf{(x+3)(x-1)^2}} = \frac{A}{X+3} + \frac{B}{X-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

Al multiplicar por $(\boldsymbol{x}+\mathbf{3})(\boldsymbol{x}-\mathbf{1})^2$ $\boldsymbol{se\ obtiene}$:

$$\mathbf{3x^2 - 8x + 13 = A(x-1)^2 + B(x+3)(X-1) + C(x+3)}$$

Ahora evaluamos para cada raíz:

Si x = -3, se obtiene:

$$3(-3)^2-8(-3)+13=A(-3-1)^2\ +B(-3+3)(\ X-1)+C(-3+3)$$

64 = 16A

A=4

Si x = 1, se obtiene:

$$\mathbf{3(1)^2-8(1)+13=A((1)-1)^2\ +B(1+3)(1-1)+C(-3+3)}$$

8=4C

A=2

Al no disponer de otra raíz, evaluamos para otro valor de x y empleamos los valores hallados:

SI X = 0, resulta:

$$\mathbf{3(0)^2-8(0)+13=A(0-1)^2\ +B(0+3)(0-1)+C(-3+3)}$$

13=4- 3B+6

B=-1

Integrando

$$\int \frac{3x^2-8x+13}{(x+3)(x-1)^2}\,dx=\frac{4}{X+3}+\frac{-1}{X-1}+\frac{2}{(x-1)^2}$$

$$=4\int \frac{4}{X+3}dx \int \frac{-1}{X-1}dx+2\frac{1}{(x-1)^2}dx$$

$$= 4\ \ln|x+3|-\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}+C$$

CASO III. q(x) hay factores cuadráticos irreducibles

Ejemplo 1

Hallar:

$$\int \frac{5x^2+2}{x^{3-}4x^2+5x}\,dx$$

RESOLUCION:

Factorizando el denominador las fracciones parciales para integrar tendría la forma siguiente:

$$\frac{5x^2+2}{x^{3-}4x^2+5x}=\frac{5x^2+2}{x(x^2-4x+5)}=\frac{A}{x}+\frac{B(2X-4)+C}{x^2-4x+5}$$

Nótese que el polinomio de grado uno (numerador de la fracción) con denominador el factor cuadrático, se lo define con la derivada del denominador; por facilitar el cálculo de la derivada.

Al simplificar tenemos:

$$5x^2 + 2 = A(x^2 - 4x + 5) + [B(2x - 4) + C]\ (x)$$

Evaluando para x=0

$$5(0)^2 + 2 = A((0)^2 - 4(0) + 5) + [B(2(0) - 4) + C\ (0)$$

2 = 5A

A=2/5

Si hacemos X=2, anulamos el término que contiene a B y como ya se conoce el valor de A

Se tiene:

$$5(2)^2 + 2 = A((2)^2 - 4(2) + 5) + [B(2(2) - 4) + C\ (2)$$

$$22 = \frac{2}{5}(1) + 2C$$

C=54/5

Ahora evaluamos para x = 1 y usando lo valores de A y C, se obtiene:

$$5(1)^2 + 2 = A((1)^2 - 4(1) + 5) + [B(2(1) - 4) + C\ (1)$$

$$7 = \frac{2}{5}(2) + B\ (-2) + \frac{54}{5}\ )$$

B = 23/10

Ahora integrando resulta

$$\int \frac{5x^2+2}{x^3-4x^2+5x}\,dx = \int \left(\frac{2/5}{x} + \frac{{}^{23}/_{10}(2x-4) + \frac{54/5}{x}}{x^2-4x+5}\right)dx$$

$$= \frac{2}{5}\int \frac{1}{x} + \frac{23}{10}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+5}\,dx + \frac{54}{5}\int \frac{1}{x^2-4x+5}\,dx$$

$$= \frac{2}{5}\ln|x| + \frac{23}{10}\ln|x^2 - 4x + 5| + \frac{54}{5}\int \frac{1}{x^2-4x+5}\,dx$$

$$= \frac{2}{5}\ln|x| + \frac{23}{10}\ln|x^2 - 4x + 5| + \frac{54}{5}\text{arctg}\ (x-2) + C$$

EJEMPLO 2

Calcular $\int \frac{x^3-1}{x^3+x}\, dx$

RESOLUCION:

En este ejemplo se puede notar que la fracción no es propia, el grado del numerador y denominador es tres; por tanto, efectuaremos primero la división del numerador entre el denominador:

$$\frac{x^3-1}{x^3+x} = 1 - \frac{x+1}{x^3+x}$$

Aplicando integral a ambos miembros tenemos:

$$\int \frac{x^3-1}{x^3+x}\, dx = \int \left(1- \frac{x+1}{x^3+x}\right) dx$$

$$= \int 1dx - \int \frac{x+1}{x^3+x}\, dx$$

Donde la primera integral es directa y la segunda se resuelve por fracciones parciales. Luego:

$$\frac{x+1}{x^3+x} = \frac{x+1}{x(x^2+1)} = A\ \frac{A}{x} + \frac{B(2x)+C}{x^2+1}$$

Al simplificar tenemos: $x + 1 = A(x^2 + 1)$ + *[B(2x) + C](1)*

Evaluando para x = 0, resulta

0+1 = $A(0^2 + 1) + [B(2(0) + C)(0)$ 1= A (1)

Ahora para x=1 y usando el valor adquirido para A, se obtiene:

$$1+1 = 1(1^2 + 1) + [B(2(1) + C)(1)$$

$$2 = 2+2B-C$$

$$2B+C=0$$

Evaluando para el valor de x=-1 y usando el valor obtenido para A, resulta:

$$-1+1 = -1(-1^2 + 1) + [B(2(-1) + C)(-1)$$

$$0 = 2 + 2B – C$$

$$2B – C = -2$$

Ahora utilizamos ambos resultados y hallamos los valores de B y C

$$\begin{cases} 2B + C = 0 \\ 2B - C = -2 \end{cases}$$

Al sumar las dos ecuaciones miembros a miembro obtenemos el valor de B: $\boxed{\begin{array}{c} 4B = -2 \\ B = -1/2 \end{array}}$

Entonces

$$\boxed{\begin{array}{c} C = -2B \\ C = -2\left(-\frac{1}{2}\right) \\ C = 1 \end{array}}$$

OTRO MÉTODO para hallar los valores de A, B y C, que muchas veces resulta más ventajoso**,** es el método que sigue:

Si la expresión $x + 1 = A(x^2 + 1)$ + *[B(2x)* + *C](x)* simplificamos hasta obtener un polinomio

Reduciendo la ecuación en ambos miembros, se obtiene:

$$x + 1 = Ax^2 + A + 2Bx^2 + Cx$$

$$X + 1 = (A+2B)x^2 + Cx + A$$

Luego, igualando las expresiones podemos decir que:

$$\begin{cases} 0 = A + 2B \\ 1 = C \\ 1 = A \end{cases}$$

Por tanto

$$\begin{cases} A = 1 \\ B = -1/2 \\ C = 1 \end{cases}$$

Con estos valores obtenidos ahora podemos integrar:

$$\int \frac{x^3-1}{x^3+x}\, dx = \int 1dx - \int \frac{x+1}{x^3+x} dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{x} \quad \int \frac{\left(-\frac{1}{2}(2x)\right)+1}{x^2+1}\right) dx$$

$$= -\left[\int \left(\frac{1}{x}\, dx \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx \int \frac{1}{x^2+1} dx\right]\right.$$

$$= x - \left[\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + \text{arc tg}(x)\right] + C$$

Ejercicios propuestos 1.6

En nos ejercicios planteados encuentre las antiderivadas:

1. $\int \frac{dx}{(x-1)(x+3)}$	11. $\int \frac{4}{x^4-1}dx$
2. $\int \frac{(4x-2)dx}{x^3-x^2-2x}$	12. $\int \frac{(2x^2+3x+2)}{(x+2)(x^2+2x+2)}dx$
3. $\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)^2}$	13. $\int \frac{x^5}{(x^2+4)^2}dx$
4. $\frac{(2-x^2)dx}{x^3+3x^2+2x}$	14. $\int \frac{4x^2+2x+8}{x(x^2+2)^2}dx$
5. $\int \frac{x^2+x-10}{(2x-3)(x^2+4)}dx$	15. $\int \frac{x^2-4x+3}{(x-1)^2(x^2+1)}dx$
6. $\int \frac{4x^2-x+1}{x^3+x^2+x-1}dx$	16. $\int \frac{x^{3-1}}{4x^3-x}dx$
7. $\int \frac{x^3dx}{x^2+x-2}$	17. $\int \frac{sen\,x\,dx}{cos^2x+cos\,x-6}$
8. $\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-5x+6)}$	18. $\int \frac{sec^2\,t\,dt}{sec^2t-3\tan t+1}$
9. $\frac{3x-1}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}dx$	19. $\int \frac{dx}{(2+cos\,x)sen\,x}$
10. $\frac{x^5+9x^3-9x^2-9}{x^3+9x}dx$	20. $\int \frac{dx}{1+x^{x/2}+e^{x/3}+e^{x/6}}$

4.2. INTEGRACION DE FUNCIONES RACIONALES TRIGONOMÉTRICAS

CASO I. Integrales de tipo $\int R(\text{sen x}, \cos \text{x})\text{dx}$

Utilizaremos la siguiente sustitución $tg\frac{1}{2}$ = **t de donde**

$$\begin{cases} sen\,x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \text{Cos x} = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \dfrac{2t}{1+t^2} \end{cases}$$

Ejemplo

Calcular $\int \frac{1}{1+sen\,x+cos\,x}dx$

Resolución:

Reemplazando y simplificando resulta:

$$\int \frac{1}{1+sen\,x+cos\,x}dx = \int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\left(\frac{2}{1+t^2}dt\right)$$

$$= \int \frac{1}{\frac{1+t^2+2t+1-t^2}{1+t^2}} \left(\frac{2}{1+t^2} dt\right)$$

$$= \int \frac{2}{2+2t^2} dt$$

$$= \int \frac{2}{2(1+t)} dt$$

$$= \int \frac{1}{1+t} dt$$

$$= \ln \mid 1+t \mid \, + C$$

$$= \ln \mid 1 + tg\, \frac{x}{2} \mid \, + C$$

CASO II. Integrales donde se cumple que

$$\int R(-\text{sen x}, -\cos \text{x})\text{dx} = \int R(\text{sen x}, \cos \text{x})\text{dx}$$

Usaremos la siguiente sustitución $tg\ x = t$ de donde
$$\begin{cases} \text{Sen x} = \dfrac{t}{\sqrt{(1-t^2}} \\ \cos \text{x} = \dfrac{1}{\sqrt{(1+t^2}} \\ dx = \dfrac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}$$

Ejemplo.

Calcular $= \int \frac{1}{1+sen^2 x} dx$

<u>SOLUCION:</u>

Reemplazando y simplificando

$$\int \frac{1}{1+sen^2 x} dx = \int \frac{1}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2} \left(\frac{dt}{1+t^2}\right)$$

$$= \int \frac{1}{1+\frac{t^2}{1+t^2}} \left(\frac{dt}{1+t^2}\right)$$

$$= \int \frac{1}{\frac{1+t^2+t^2}{1+t^2}} \left(\frac{dt}{1+t^2}\right)$$

$$= \int \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$= \int \frac{1}{1+(\sqrt{2}\,t)^2} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \, arc\, tg\left(\sqrt{2}\, t\right) + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \, arc\, tg\left(\sqrt{2}\, tg\, x\right) + C$$

Ejercicios propuestos 1.7

En los siguientes ejercicios calcular las antiderivadas:

1. $\int \frac{dx}{2\, sen\, x + cos\, x + 5}$	**5.** $\int \frac{dx}{sen\, x + tg\, x}$
2. $\int \frac{dx}{3sen\, x + 4cos\, x}$	**6.** $\int \frac{dx}{cot\, x + csc\, x}$
3. $\int \frac{1}{3sen\, x - 4cos\, x} dx$	**7.** $\int \frac{sin\, x + cos\, x - 1}{sin\, x + cos\, x + 1}$
4. $\int \frac{sen^2 x}{1 + sen^2 x} dx$	**8.** $\int \frac{sin\, x - 2cos\, x}{sin\, x + cos\, x + 1}$

Reto:

Encuentra las antiderivadas de:

1. $\int \frac{x-1}{x^3 + 4x}$	**43.** $\int \frac{e^{ar\, sen\, x} + 3x^2 - 4x + 2}{(\sqrt{1 - x^2}} dx$
2. $\int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^3}$	**44.** $\int \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^2} dx$
3. $\int x^3 \sqrt{x^2} + 9dx$	**45.** $\int sen^2 x \cos 2\, xdx$
4. $\int 3x^2 - 2x)e^{2x} dx$	**46.** $\int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[4]{x}} dx$

5. $\int \sqrt[3]{sen\ 2x}\ cos^5\ 2xdx$	47. $\int \frac{dx}{1 + sen\ x + cos\ x}$
6. $\int \frac{2x - 6}{(x - 1)(x^2 + 1} dx$	48. $\int (3x^2 + 2x + 5)\ln\ xdx$
7. $\int \frac{2\ cos\ x}{9 - cos\ 2x} dx$	49. $\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx$
8. $\int (x^2 - 5x + 3)e^{-2x}dx$	50. $\int 2(3x^2 + 5)xdx$
9. $\int \frac{e^x}{(\sqrt{e^{2x}} + 4\,e^x + 1} dx$	51. $\int \frac{x^3}{x^3 + 4} dx$
10. $\int \frac{senh\ (\sqrt{x}\,)}{\sqrt{x}} dx$	52. $\int (6x^2 + 4x + 3)$ arc tgx
11. $\int \frac{x + 1}{(x^2 + 4x + 5)(x - 1)} dx$	53. $\int \frac{sen^4 x}{cos^4 x} dx$
12. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$dx	54. $\int \frac{2cos\ x - sen\ x}{3\ sen\ x + cos\ x} dx$
13. $\int sen^2 2x\ cos\ xdx$	55. $\int cos\sqrt{x}dx$
14. $\int \frac{cos\ x}{(\sqrt{cos\ 2x}} dx$	56 $\int \frac{x}{x^3 - 1} dx$
15 $\int cos\ 3x\ \ 7xdx$	57. $\int \frac{x + 1}{x^3 + 4x} dx$
16. $\int \frac{3x^2 - 5x + 4}{(x - 2)^2((x^2 + 2x + 3)} dx$	58. $\int \frac{x - 1}{x^3 + 4x} dx$
17. $\int \frac{sen\ x}{cos\ x\ (cos^2 x + 1)} dx$	59. $\int \frac{5x^3 - 3x^2 + 2x - 1}{x^4 + x^2} dx$
18. $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$dx	60. $\int \frac{ln\ x}{x + 4x\ ln^2 x} dx$
19. $\int x^3 \sqrt{x^2 + 9}\ dx$	61. $\int \frac{\sqrt{(9-x^2)^3}}{x^6}$dx
20. $\int \frac{x}{(x - 3)^2} dx$	62. $\int \frac{7\ x + 3}{(x^2 + 2x + 2)(x - 1)} dx$

21. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+25}}\,dx$	**63.** $\int \frac{2x+3}{x^3+4x)}\,dx$
22. $\int \frac{3x}{x^4+4x^2+5)}\,dx$	**64.** $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$
23. $\int x^2 \,arc\,tg\,x\,dx$	**65.** $\int \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$
24. $\int \frac{\sqrt{1-4x^2}}{x}\,dx$	**66.** $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
25. $\int e^{2x}\,sen\,x\,dx$	**67.** $\int \frac{x^2-2x}{x^3+1}\,dx$
26. $\int \frac{1-sen\,x}{\cos x}\,dx$	**68.** $\int \frac{(16+x^2)^{3/2}}{x^2}$
27. $\int \frac{e^x}{e^{2x}\sqrt{e^{2x}+4}}\,dx$	**69.** $\int \frac{3\cos x-4\,sen\,x}{sen\,x+\cos x+1}\,dx$
28. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$	**70.** $\int \frac{3\,tg\,x-\cos^2 x}{\cos x}\,dx$
29. $\int x\sqrt{2x+1}\,dx$	**71.** $\int \frac{1}{x(3+\ln x)}\,dx$
30. $\int x^3 e^{-x^2}\,dx$	**72.** $\int \frac{dx}{x^3-x}$
31. $\int \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}\,dx$	**73.** $\int \frac{2x-5}{3x^2+6x+9}\,dx$
32. $\int \frac{2x-1}{x^3+2x^2-3x}\,dx$	**74.** $\int \frac{x-1}{x^3+4x}\,dx$
33. $\int \frac{x^4+3x^3-5x^2-4x+7}{x^3+x^2-5x+3}\,dx$	**75.** $\int 2x\,arc\,sen\,x\,dx$
34. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt[3]{x}\,(1+\sqrt[3]{x})}$	**76.** $\int \frac{dx}{\sqrt{sen\,x\cos^3 x}}$

$35. \int \frac{x^2 - 2}{3x + 1} dx$	$77. \int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{1 + sen\, x \cos^2 x}}$
$36. \int (3x - 1) \cos 2x dx$	$78. \int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{1 + sen\, x \cos^2 x}}$
$37. \int \ln(2x + 3) dx$	$79. \int \sqrt{1 + \sqrt{x} dx}$
$38. \int \frac{2x + 3}{x^2 - 3x + 2} dx$	$80. \int \frac{dx}{(x + 1)(x^2 + 2x + 2)}$
$39. \int \frac{x^3 - 1}{(x^2 + 4)x} dx$	$81. \int \frac{e^{4x} + 3e^{2x}}{e^{4x} + 5} dx$
$40. \int \frac{1 - sen\, x}{x + \cos x}$	$82. \int \sin 2x \cos 3x \cos 2x dx$
$41. \int \frac{2x + 3}{x^2 - 3x + 2} dx$	$83. \int \frac{x}{x + \sqrt[3]{x}} dx$
$42. \int \frac{sen^2 x dx}{sen\, x + 2 \cos x}$	$84. \int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2}$

REFERENCIAS

Ayres, F. J. (1989). Teoría y problemas de cálculo diferencial e integral. Madrid, España: McGraw-Hill.

Granville, W. (2009). Cálculo diferencial e integral. México: Editorial Limusa S.A.
Métodos de integración. (http://www.mat.uson.mx/eduardo/calculo2/metodos.pdf).
Villena, M. La integral indefinida. Guayaquil, Ecuador.
801 ejercicios resueltos de integral indefinida.

Beer, F., Johnston, E., Aisenber, E., & y Aisenberg, E. (2010).
Mecánica vectorial para ingenieros Estática (9na ed.). México, México: The McGraw-Hill Companies, Inc.

De Oteyza, E., Lam, E., Hernández, C., Carrillo, A., & y Ramírez, A. (2011). Geometría Analítica (3era ed.). México, México: PEARSON EDUCACIÓN. Jiménez, R. (2008). Cálculo integral (1era ed.). México, México: PEARSON EDUCACIÓN.

Purcell, E., Varberg, D., & Rigdon, S. (2007). Cálculo diferencial e integral (9na ed.). México, México: Pearson Educación.

Stein, S., & y Barcellos, A. (1995). Cálculo y geometría analítica (5ta ed.). Santafé de Bogotá, Colombia: McGraw-Hill,.

Stewart, J. (2010). Cálculo de una variable. Conceptos y contextos (4ta ed.). Ediciones Paraninfo.

Stewart, J. (2008). Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas (7ma ed.). México, México: Cengage Learning.