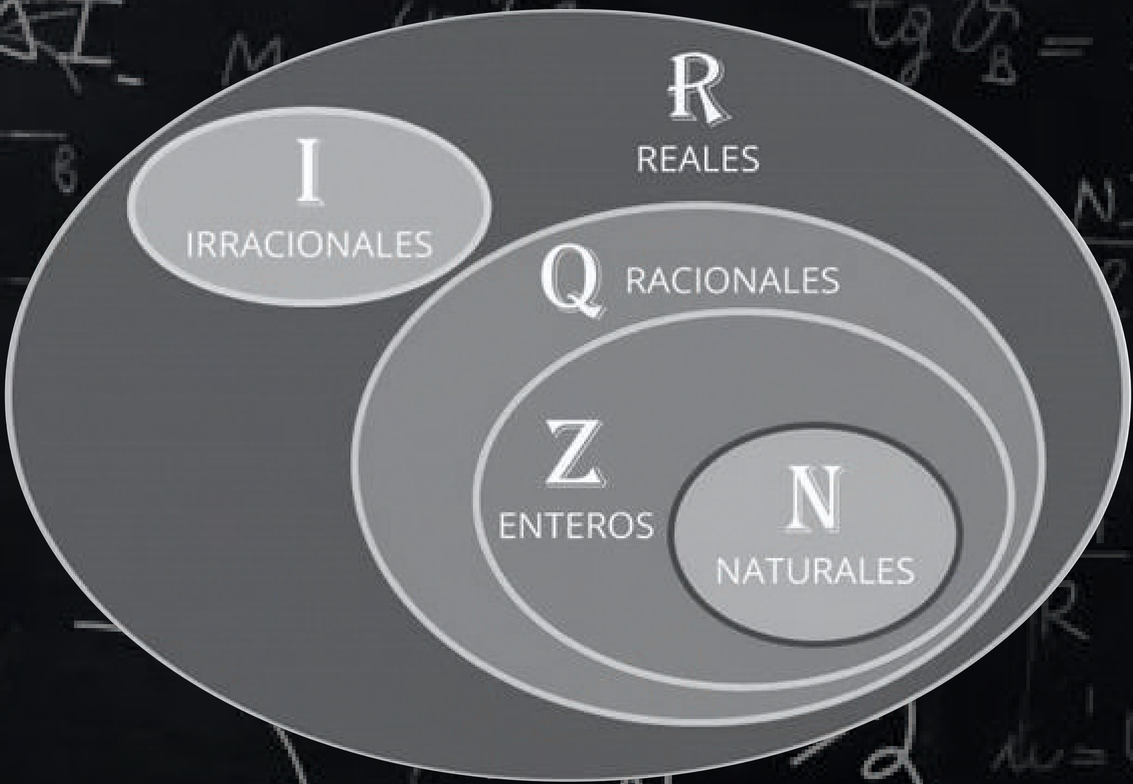
La Cantuta
Fondo Editorial
Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle



CONSTRUCCIÓN DE LOS NÚMEROS REALES 1

AUTORES

Gamaniel Domingo Gonzales Salvador
Florencio Flores Ccanto
Mario Jaime Andia
Vivian Collahua Rupaylla
Oliver Eulogio Zavaleta Rime
Israel Coronado Huanaco

Universidad Nacional de Educación
Enrique Guzmán y Valle
Alma Máter del Magisterio Nacional

fondoeditorial.une.edu.pe

CONSTRUCCIÓN DE LOS NÚMEROS REALES 1

Gamaniel Domingo Gonzales Salvador

Florencio Flores Ccanto

Mario Jaime Andia

Vivian Collahua Rupaylla

Oliver Eulogio Zavaleta Rime

Israel Coronado Huanaco

Lima - Perú
2024

ISBN: 978-612-4148-66-8

CONSTRUCCIÓN DE LOS NÚMEROS REALES 1

© **Gamaniel Domingo Gonzales Salvador**
https://orcid.org/0000-0002-9129-3800

Florencio Flores Ccanto
https://orcid.org/0000-0001-5600-9854

Mario Jaime Andia
https://orcid.org/0000-0002-9026-3060

Vivian Collahua Rupaylla
https://orcid.org/0000-0001-5631-8921

Oliver Eulogio Zavaleta Rime
https://orcid.org/0009-0002-1414-2571

Israel Coronado Huanaco
https://orcid.org/0009-0008-7153-7565

Editada por:

© Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle (UNE) - **Fondo Editorial "La Cantuta"**
Dirección: Enrique Guzman y Valle N° 951, Lurigancho - Chosica 15472, Perú
ISNI: 0000 0000 8534 4267
fondoeditorial@une.edu.pe
Teléf. móvil: +51 999 140 920
Portal Web: https://www.une.edu.pe/

Primera edición digital: Diciembre 2024
Libro digital disponible en: https://fondoeditorial.une.edu.pe/

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú N° 2024-13882
ISBN: 978-612-4148-66-8
DOI: https://doi.org/10.54942/lacantuta.47

Libro resultado de Investigación y con revisión por pares doble ciego.
Sello editorial: Fondo Editorial (978-612-4148)

DEDICATORIA

Este texto, *Construcción de los Números,* está dedicado a la Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle, Alma Máter del Magisterio Nacional, y a la juventud estudiosa de la Facultad de Ciencias, en especial a los estudiantes del Departamento de Matemática y Matemática e Informática, quienes son los futuros líderes educativos y agentes de cambio, con ellos, compartimos gratas experiencias formativas.

También está dedicado a nuestros seres queridos, tanto ausentes como presentes. Al Vicerrectorado de Investigación, Dr. Daniel Chirinos Maldonado, y al Director de Investigación, Dr. Florencio Flores CCanto, por promover la publicación del presente libro..

ÍNDICE

RESUMEN

En este texto aborda uno de los temas más apasionantes de las matemáticas: la construcción de los números reales. En él se analizan aspectos clave como su definición, propiedades y los métodos históricos que influyeron en su desarrollo hasta la actualidad. El objetivo principal de este trabajo es profundizar en la comprensión de los números reales, examinando su construcción histórica y sus aplicaciones en distintos campos del conocimiento humano.

Desde la introducción se contextualiza el tema que es el eje fundamental que justifica la relevancia de estudiar concienzudamente la construcción de los números reales en el ámbito académico y científico para su mejor comprensión de sus implicaciones futuras. También se presentan los objetivos específicos de este texto, que buscan analizar aquellos conocimientos teóricos y métodos históricos utilizados para hacer su construcción.

En la sección de los *Fundamentos Teóricos*, se proporciona la definición precisa de los números reales destacando sus propiedades y características distintivas. Además, se subraya su importancia como extensión de los conjuntos numéricos previos, consolidándolos como un pilar fundamental para las matemáticas y otras disciplinas científicas.

La *Construcción Histórica de los Números Reales* se estudia en detalle en el capítulo dedicado. Se revisa paulatinamente los distintos métodos usados a lo largo del tiempo para que se establezcan los números reales, destacando los métodos de Dedekind y el de Cauchy. Este análisis histórico proporciona la visión panorámica adecuada sobre el desarrollo de este concepto matemático crucial.

El capítulo de los *Métodos de Construcción de los Números Reales* profundiza en los procesos de construcción, explicando con todo detalle el método de Dedekind y el método de Cauchy, los cuales tienen una mayor relevancia histórica en sus fórmulas y demostraciones.

En cuanto a las aplicaciones, en la vida real, de los números reales son explorados en otro capítulo, donde se detallan sus diversos usos dentro de las matemáticas y en otras disciplinas como la física, la ingeniería y la economía. Se resalta su papel esencial en la modelización y resolución de problemas del mundo actual.

Finalmente, en las conclusiones, se recapitulan los hallazgos más relevantes para el estudio, resaltando la importancia de los números reales como una herramienta esencial para el desarrollo científico y tecnológico. Además, se presentan reflexiones finales sobre el impacto de la construcción de los números reales en la investigación y la sociedad.

En resumen, este trabajo ofrece una comprensión amplia sobre la construcción de los números reales, abarcando desde sus fundamentos teóricos hasta sus aplicaciones prácticas. Los números reales han sido un objeto de estudio fascinante y desafiante a lo largo de la historia de las matemáticas, y su construcción ha dejado un legado duradero en el mundo científico que continúa cada día evolucionando con los nuevos descubrimientos y teorías.

Palabras clave: números reales, construcción, método de Dedekind, método de Cauchy, aplicaciones, matemáticas.

INTRODUCCIÓN

La construcción de los números reales es un tema de gran relevancia tanto en el ámbito de las matemáticas como en otras disciplinas científicas. Los números reales, concebidos como una extensión de los conjuntos numéricos que incluyen los números naturales, enteros racionales e irracionales, desempeñan un papel fundamental en la resolución de problemas complejos y en el modelo preciso de los fenómenos en el mundo real. La comprensión de cómo se han construido los números reales a lo largo de la historia es esencial para una sólida formación como docente de matemáticas y para las aplicaciones prácticas en diversas disciplinas del conocimiento humano.

Actualmente, el estudio de la construcción de los números reales a partir de otros conjuntos numéricos de base sigue siendo el objeto de interés y debate en la comunidad académica tanto en matemáticas como en pedagogía. Este hecho resalta su continua importancia en el desarrollo consistente de las matemáticas y de disciplinas afines.

El propósito principal de esta monografía es explorar en profundidad la construcción de los números reales, abordando desde sus fundamentos teóricos hasta sus aplicaciones en diversas áreas del conocimiento humano.

- **Contexto y justificación del tema**

  El contexto y la justificación del estudio sobre la construcción de los números reales se fundamenta en su papel como una extensión de los conjuntos numéricos previamente definidos, así como en su relevancia para la resolución de problemas matemáticos y científicos. A lo largo de la historia, matemáticos como Richard Dedekind y Augustin-Louis Cauchy han presentado métodos fundamentales para establecer de forma rigurosa el conjunto de los números reales. La comprensión de su construcción histórica y teórica resulta esencial para apreciar su importancia en el desarrollo de la matemática y en su aplicación en diversas áreas de la ciencia.

- **Objetivos**

  Los objetivos específicos de este texto son:

  1. Analizar los fundamentos teóricos de los números reales, incluyendo sus propiedades y características distintivas.

2. Investigar los métodos históricos utilizados en la construcción de los números reales, como el método de Dedekind y el método de Cauchy.
3. Explorar las diversas aplicaciones de los números reales en matemáticas y otras disciplinas científicas, resaltando su relevancia en la resolución de problemas reales.

- **Metodología utilizada**

  Este texto se fundamenta en una investigación bibliográfica exhaustiva. Para ello, se han consultado diversas fuentes académicas, como libros, artículos de revistas científicas y recursos en línea, para recopilar información relevante sobre la construcción de los números reales y sus aplicaciones.

  En resumen, este texto se enfocará en proporcionar una visión integral de la construcción de los números reales, desde sus fundamentos teóricos hasta sus aplicaciones en distintas áreas del conocimiento.

- **Fundamento**

  En esta sección, se abordará los fundamentos teóricos relacionados con la construcción de los números reales. Los números reales son un conjunto numérico que engloba tanto a los números racionales como a los números irracionales y su estudio es fundamental para diversas áreas de las matemáticas y otras disciplinas.

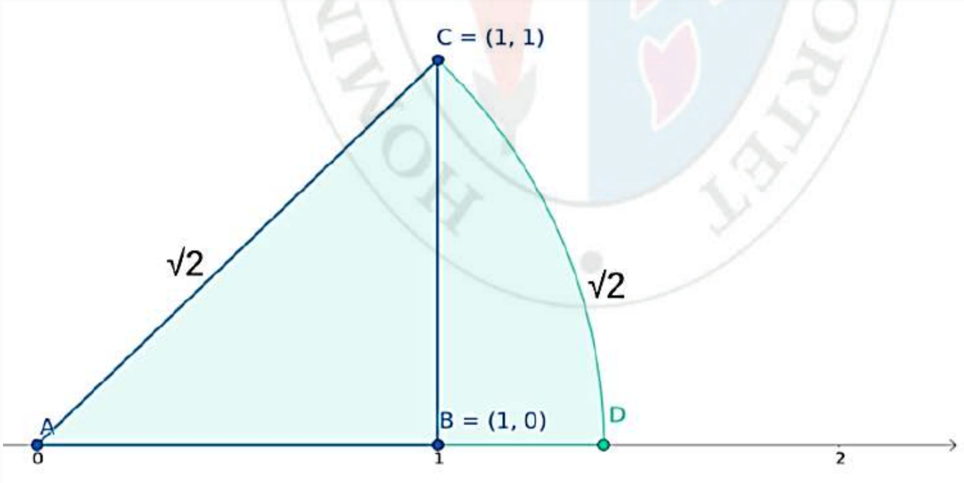
CAPÍTULO I

DEFINICIÓN DE LOS NÚMEROS REALES

La definición de los números reales es esencial para comprender su naturaleza y su papel en las matemáticas. Los números reales son aquellos números que pueden representarse en la recta numérica y que incluyen a los números enteros, fraccionarios y decimales, así como a los números irracionales, como π (pi) y √2 (raíz cuadrada de 2). Su representación en la recta numérica permite visualizar la totalidad de los números y establecer relaciones de orden entre ellos. Esta definición proporciona una base sólida para el estudio y la manipulación de los números reales en diversas operaciones matemáticas y aplicaciones prácticas.

Figura 1

Representación de un número irracional en la recta real utilizando el teorema de Pitágoras.



La exploración de la construcción de los números naturales se sumerge en las raíces de antiguas civilizaciones, como la babilónica, que ingeniosamente utilizaban sistemas de numeración para representar valores aproximados de números reales. Sin embargo, es en la matemática griega donde encontramos los primeros cimientos de una teoría rigurosa de los números reales, enfocada en proporciones y razones inconmensurables.

En el desarrollo de la matemática en el siglo XIX, surgió la necesidad de dotar de una formulación matemática precisa a la noción de continuidad y completitud de los números reales, elevándolos así al estatus de objetos matemáticos dignos de estudio. En la actualidad, existen diversas formas de presentar este conjunto mediante axiomas que lo caracterizan de manera rigurosa. Una de las caracterizaciones más comunes se basa en tres propiedades fundamentales que definen el conjunto (K, +, *, ≤):

El concepto de que el conjunto de números reales (K, +, *, ≤) es un cuerpo se debe a diversos matemáticos que contribuyeron al desarrollo y formalización de las propiedades fundamentales que lo caracterizan. Entre ellos, se destacan los trabajos de Richard Dedekind y Augustin-Louis Cauchy.

Richard Dedekind, en su trabajo "Stetigkeit und irrationale Zahlen" (Continuidad y números irracionales) publicado en 1872, formuló la definición axiomática de los números reales y estableció las propiedades fundamentales que aseguran que el conjunto es un cuerpo. Dedekind introdujo la noción de corte de los números racionales para definir los números reales, lo que permitió establecer las propiedades de orden, las operaciones de suma y multiplicación.

Augustin-Louis Cauchy, por otro lado, contribuyó al desarrollo de la teoría de sucesiones y límites en matemáticas. Sus trabajos sobre sucesiones de números racionales y su relación con los números reales fueron fundamentales para demostrar las propiedades de completitud y coherencia del conjunto de los números reales.

1.1. Propiedades de los números reales

Las propiedades que caracterizan al conjunto de números reales como un cuerpo son:

A. Propiedad de Asociatividad:

Suma: (a + b) + c = a + (b + c)

Multiplicación: (a * b) * c = a * (b * c)

B. Propiedad de Conmutatividad:

Suma: a + b = b + a

Multiplicación: a * b = b * a

C. **Propiedad de Distributividad:**

a * (b + c) = a * b + a * c

D. **Elementos Neutros:**

Suma: Existe un elemento neutro, denotado como 0, tal que a + 0 = a para cualquier a en el conjunto de números reales.

Multiplicación: Existe un elemento neutro, denotado como 1, tal que a * 1 = a para cualquier a en el conjunto de números reales.

E. **Elementos Opuestos:**

Existe un elemento opuesto, denotado como -a, tal que a + (-a) = 0 para cualquier a en el conjunto de números reales.

Estas propiedades aseguran que el conjunto de números reales cumple con una estructura algebraica sólida, lo que es esencial para realizar operaciones matemáticas de manera consistente y establecer relaciones de orden entre los elementos del conjunto. Además, estas propiedades son fundamentales en diversas áreas de las matemáticas y en aplicaciones prácticas.

A continuación, se presentan las fórmulas y demostraciones que complementan los conceptos sobre el conjunto de los números reales y su estructura algebraica como un cuerpo:

Fórmula de la Propiedad de Distributividad

Para todo a, b y c en el conjunto de números reales (K), la propiedad distributiva se expresa mediante la fórmula:

a * (b + c) = a * b + a * c

- *Demostración de la Propiedad de Distributividad:*

Para demostrar esta propiedad, consideremos a, b y c como elementos arbitrarios en el conjunto de números reales (K). Utilizaremos la definición de las operaciones de suma y multiplicación en K:

a * (b + c) = a * b + a * c

Aplicamos la propiedad distributiva a la izquierda de la ecuación:

(a * b) + (a * c) = a * b + a * c

La propiedad de identidad para la suma implica que (a * b) + (a * c) = a * b + a * c, y por lo tanto, la propiedad de distributividad se cumple en el conjunto de los números reales (K).

Fórmula del Elemento Neutro para la Multiplicación:

En el conjunto de los números reales (K), el elemento neutro para la multiplicación está representado por el número 1. Para cualquier número real a en K, la fórmula que define el elemento neutro es:

a * 1 = a

- *Demostración del elemento neutro para la multiplicación:*

Consideremos a un número real arbitrario a en el conjunto de los números reales (K). Usando la definición de la operación de multiplicación en K:

a * 1 = a

Aplicamos la propiedad de identidad para la multiplicación, lo que implica que el producto de cualquier número real a por el elemento neutro 1 es igual a "a". Por lo tanto, el elemento neutro para la multiplicación se cumple en el conjunto de los números reales (K).

Estas fórmulas y demostraciones adicionales refuerzan la estructura algebraica del conjunto de los números reales y su caracterización como un cuerpo, lo que permite realizar operaciones matemáticas de manera coherente y establecer propiedades fundamentales que son aplicables en diversos campos de las matemáticas y en otras disciplinas científicas.

1.2. Orden en el conjunto de los números reales

El conjunto de los números reales (K) junto con el orden ≤ establece una estructura matemática conocida como un conjunto totalmente ordenado. Esta estructura implica que los números reales se alinean en una línea lógica y ordenada, cumpliendo con una relación de orden que es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Además, este orden se conjuga armoniosamente con las operaciones de suma y multiplicación, lo que implica que si $a \leq b$, entonces $a + c \leq b + c$; y si $a \leq b$ y $c \geq 0$, entonces $ac \leq bc$.

Para comprender mejor esta estructura matemática, es fundamental examinar las propiedades y demostraciones que sustentan estas afirmaciones.

Propiedades y demostraciones del conjunto totalmente ordenado:

A. **Propiedad de Reflexividad**:

Para todo número real a en K, se cumple que $a \leq a$. Es decir, cada número real es menor o igual que sí mismo.

Demostración de la Propiedad de Reflexividad:

Para demostrar la propiedad de reflexividad, tomemos un número real arbitrario a en K. Según la definición de orden $\leq$ en K, tenemos que $a \leq a$, lo que cumple con la propiedad de reflexividad.

Reflexividad: Para todo número real $a \in K$, se cumple que $a \leq a$.

La reflexividad es una propiedad inherente a la relación de orden en los números reales, ya que cualquier número es igual a sí mismo.

B. **Propiedad de Antisimetría:**

Si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$. Esta propiedad implica que, si dos números reales son comparables en términos de su orden, entonces son iguales.

Demostración de la Propiedad de Antisimetría:

Supongamos que $a \leq b$ y $b \leq a$ para dos números reales a y b en K. Si $a \leq b$, entonces por la propiedad de reflexividad $a \leq a$, y por transitividad $a \leq b$. De manera similar, si $b \leq a$, entonces $b \leq b$ por reflexividad y $b \leq a$ por transitividad. Dado que ambos casos implican que $a \leq b$ y $b \leq a$, por la Propiedad de Antisimetría se concluye que

$$a = b.$$

Otra forma: Si dos números reales $a,\ b \in K,$ y $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$.

Supongamos que $a \leq b$ y $b \leq a$. Según estas relaciones de orden, tenemos $a + (-b) \leq 0$ y $b + (-a) \leq 0$. Sumando ambas desigualdades, obtenemos $a + (-b) + b + (-a) \leq 0 + 0$, lo cual simplifica a $0 \leq 0$. Esta última desigualdad siempre se cumple, y por lo tanto, se concluye que $a = b$.

C. Propiedad de Transitividad:

Si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$. Esto significa que, si dos números reales están relacionados en términos de su orden, entonces el primero también está relacionado con el último.

Demostración de la Propiedad de Transitividad:

Supongamos que $a \leq b$ y $b \leq c$ para tres números reales a, b y c en K. Si $a \leq b$ y $b \leq c$, por transitividad tenemos que $a \leq c$, cumpliendo así la Propiedad de Transitividad.

Otra forma: Si tres números reales a, b, $c \in K$, y $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$.

Supongamos que $a \leq b$ y $b \leq c$. Entonces, por la propiedad de la suma de desigualdades, tenemos $a + (b + (-b)) \leq b + (b + (-b))$. Al simplificar, obtenemos $a + 0 \leq b + 0$, lo cual resulta en $a \leq b$. Como también se cumple que $b \leq c$, aplicando la misma propiedad de suma de desigualdades, tenemos $b + (c + (-c)) \leq c + (c + (-c))$. Al simplificar, obtenemos $b + 0 \leq c + 0$, lo cual resulta en $b \leq c$. Finalmente, combinando ambas desigualdades, tenemos $a \leq b \leq c$, lo que implica que $a \leq c$.

En conclusión: El conjunto K, conformado por los números reales, posee una estructura algebraica y un orden total que se complementan armoniosamente. Esta propiedad de conjunto totalmente ordenado asegura que los números reales se alinean en una línea lógica y ordenada, estableciendo relaciones de orden reflexivas, antisimétricas y transitivas. Estas propiedades fundamentales son esenciales para el desarrollo de la matemática y su aplicación en diversas áreas del conocimiento, garantizando una manipulación consistente y coherente de los números reales en operaciones matemáticas y problemas del mundo real.

1.3. Presentación de los números reales

En el siglo XIX, se levantó la necesidad de darles forma matemática a la continuidad y completitud de los números reales, transformándolos en objetos matemáticos de estudio. Actualmente, existen distintas formas de presentar este conjunto mediante axiomas.

La caracterización más común reposa en tres propiedades fundamentales:

A. Conjunto K es un conjunto completo

El conjunto K es completo, cumpliendo con el místico axioma del supremo, que asegura que todo conjunto no vacío y acotado superiormente en los números reales tiene un supremo, el límite superior más alto.

a. Propiedad del Axioma del Supremo:

Para un conjunto A en los números reales, si $A \neq \emptyset$ y A tiene cota superior, entonces existe el supremo de A, denotado como $sup(A)$. El supremo de A es el número real más pequeño que es mayor o igual a todos los elementos de A.

b. Fórmula del Supremo:

El supremo de un conjunto A se define como:

$sup(A) = x : a \leq x$, para todo $a \in A$.

c. Demostración del Axioma del Supremo:

Para demostrar que el conjunto A tiene un supremo, se debe considerar la propiedad de completitud de los números reales. Si A es acotado superiormente, entonces existe un número real M tal que $a \leq M$, para todo $a \in A$.

Definimos el conjunto B como los números reales mayores o iguales que cada elemento de A:

$B = \{x : x \geq a$, para todo $a \in A\}$

El conjunto B es no vacío y acotado inferiormente por cada elemento de A, ya que si $a \in A$, entonces a es una cota inferior de B.

Dado que el conjunto B es no vacío y acotado inferiormente, según el axioma de completitud, existe el ínfimo de B, denotado como $inf(B)$.

Para demostrar que $inf(B)$ es el supremo de A, debemos mostrar dos propiedades:

$inf(B)$ es una cota superior de A: Si $a \in A$, entonces a es un elemento de B, y por lo tanto, $a \leq inf(B)$.

$inf(B)$ es el menor de todas las cotas superiores de A: Si b es una cota superior de A, entonces b es un elemento de B, y por lo tanto, $b \geq inf(B)$.

Dado que $inf(B)$ cumple ambas propiedades, se concluye que es el supremo de A, es decir, $inf(B) = sup(A)$.

En conclusión, el axioma del supremo asegura que el conjunto K, conformado por los números reales, es completo y cumple con la propiedad de tener un supremo para todo conjunto no vacío y acotado superiormente. Esta propiedad es esencial en el estudio y la aplicación de los números reales en diversas áreas de las matemáticas y otras disciplinas, garantizando la existencia de límites superiores y permitiendo el análisis y resolución de problemas complejos. Los matemáticos Augustin-Louis Cauchy y Richard Dedekind, entre otros, contribuyeron significativamente a la construcción y la comprensión profunda de los números reales, sentando las bases para su estudio y aplicaciones en la actualidad.

Palabras clave: números reales, construcción, axioma del supremo, propiedad de completitud, límite superior.

1.4. La Categoricidad

Estas tres propiedades fundamentales definen el concepto de cuerpo totalmente ordenado. Aunque en teoría podrían existir otros conjuntos que satisfagan estas condiciones y sean diferentes a los números reales, el teorema de la Categoricidad sugiere que, de existir, ambas estructuras serían esencialmente las mismas.

Teorema de la Categoricidad y construcción de los números reales

El Teorema de la Categoricidad es un resultado importante en la teoría de conjuntos que se relaciona con la construcción de los números reales. Este teorema establece que, en el conjunto de los números reales, existe una única estructura algebraica que satisface ciertas propiedades, lo que implica que cualquier otro conjunto que cumpla estas mismas propiedades es isomorfo al conjunto de los números reales.

A. Propiedades Fundamentales del Teorema de la Categoricidad:

a. Orden Total: El conjunto de los números reales (K, ≤) es un conjunto totalmente ordenado. Esto significa que todos los elementos del conjunto se pueden comparar entre sí, cumpliendo una relación de orden que es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

b. Cuerpo Ordenado Completo: El conjunto de los números reales es un cuerpo ordenado completo, lo que implica que satisface las propiedades algebraicas de suma y multiplicación, y además, cualquier subconjunto no vacío acotado superiormente tiene un supremo, el límite superior más alto.

c. Arquimediano: El conjunto de los números reales es arquimediano, es decir, no existe un número real que sea infinitamente mayor que otro número real.

B. Construcción de los números reales y categoricidad:

El Teorema de la Categoricidad se relaciona con la construcción de los números reales porque asegura que cualquier otro conjunto que cumpla con las propiedades fundamentales antes mencionadas es esencialmente único e isomorfo al conjunto de los números reales. Esto significa que la estructura algebraica de los números reales es determinada de manera única por estas propiedades, lo que garantiza su coherencia y consistencia matemática.

C. **Demostración de la categoricidad:**

La demostración del Teorema de la Categoricidad se basa en argumentos lógicos y algebraicos avanzados, y su formulación matemática precisa excede los límites de esta monografía. Sin embargo, la idea central de la demostración es establecer que cualquier otro conjunto que satisfaga las propiedades fundamentales, en esencia, es una réplica del conjunto de los números reales y se comporta de manera idéntica en términos de la estructura algebraica.

En conclusión, el Teorema de la Categoricidad es un importante resultado matemático que afirma la unicidad de la construcción de los números reales en el contexto de ciertas propiedades fundamentales, como el orden total, la estructura de cuerpo ordenado completo y la arquimedianidad. Este teorema garantiza que cualquier otro conjunto que cumpla con estas propiedades es esencialmente igual al conjunto de los números reales en términos de la estructura algebraica y el comportamiento numérico. La demostración del Teorema de la Categoricidad es un logro significativo en la teoría de conjuntos y ha contribuido a reforzar la coherencia y consistencia de los números reales como un conjunto matemático esencial en la resolución de problemas en diversas áreas del conocimiento.

Palabras clave: Teorema de la Categoricidad, números reales, unicidad, estructura algebraica.

Así pues, nos sumergimos en el conjunto de los números reales, simbolizado por el enigmático símbolo $\mathbf{R}$. Y ahí no termina nuestro viaje de descubrimiento, pues nos encontramos con dos notables construcciones matemáticas: la creatividad de Cantor y la invención de Dedekind.

El ilustre matemático Georg Cantor nos asombra con sus "sucesiones de Cauchy", donde cada número real es una melodía que progresivamente se acerca a su identidad mediante sucesiones de números racionales.

Por otro lado, Richard Dedekind nos revela sus "cortaduras", como delicados tijeretazos que dividen el conjunto de números racionales en dos partes, dando lugar a un número real como el supremo de una de ellas.

Estas ingeniosas construcciones ofrecieron la base formal para una teoría rigurosa de los números reales. Al sumergirnos en estas maravillas, descubrimos tesoros ocultos de conceptos matemáticos menos evidentes, como la convergencia misteriosa, los límites infinitos y la densidad sutil, que se encuentran delicadamente entrelazados en el enigmático axioma de completitud.

1.5. Propiedades y características de los números reales

Los números reales poseen propiedades y características que los hacen fundamentales en el desarrollo de la matemática y en su aplicación en otras áreas. Algunas de las principales propiedades incluyen la cerradura bajo las operaciones de suma y multiplicación, lo que significa que la suma o multiplicación de dos números reales también es un número real. Además, los números reales tienen propiedades de inverso aditivo y multiplicativo, lo que implica que para cada número real "a", existe un número real "-a" que cumple con la propiedad "a + (-a) = 0" y un número real "1/a" que cumple con la propiedad "a * (1/a) = 1", siempre que "a" sea diferente de cero. Asimismo, los números reales cumplen con la propiedad de densidad, lo que significa que entre cualquier par de números reales siempre existe otro número real. Esta propiedad es fundamental en la resolución de problemas y la aproximación de valores en la matemática y en aplicaciones prácticas.

A continuación, se presentarán las principales propiedades y características de los números reales, junto con sus demostraciones y los nombres de los matemáticos que contribuyeron a su estudio.

A. Propiedad de Cerradura bajo las operaciones de suma y multiplicación

La propiedad de cerradura es una característica fundamental de los números reales, que indica que la suma o multiplicación de dos números reales siempre da como resultado otro número real.

a. Propiedad de Cerradura bajo la Suma:

Para todo número real $a, b \in \mathbb{R}$, su suma $a + b \in \mathbb{R}$.

Demostración:

La demostración de la propiedad de cerradura bajo la suma es sencilla. Dado que a y b son números reales, su suma es simplemente la adición de dos cantidades reales, lo cual siempre resulta en un número real. Por lo tanto, la propiedad de cerradura bajo la suma se cumple para los números reales.

b. Propiedad de Cerradura bajo la Multiplicación:

Para todo número real $a, b \in \mathbb{R}$, su producto $a * b \in \mathbb{R}$.

Demostración:

Al igual que en la propiedad de cerradura bajo la suma, la demostración de la propiedad de cerradura bajo la multiplicación es directa. Dado que a y b son números reales, su producto es simplemente la multiplicación de dos cantidades reales, lo cual siempre resulta en un número real. Por lo tanto, la propiedad de cerradura bajo la multiplicación se cumple para los números reales.

B. Propiedades de Inverso Aditivo y Multiplicativo

Los números reales poseen propiedades de inverso aditivo y multiplicativo, lo que implica que para cada número real a, existe un número real "-a" que cumple con la propiedad "a + (-a) = 0" y un número real "1/a" que cumple con la propiedad "a * (1/a) = 1", siempre que "a" sea diferente de cero.

a. Propiedad de Inverso Aditivo:

Para todo número real $a \in \mathbb{R}$, existe un número real "-a" tal que a + (-a) = 0.

Demostración:

La demostración de la propiedad de inverso aditivo se realiza mediante el concepto de aditivo inverso. Dado que la suma de un número real con su aditivo inverso es igual a cero, podemos afirmar que "-a" es el aditivo inverso de a, ya que a + (-a) = 0. Por lo tanto, la propiedad de inverso aditivo se cumple para los números reales.

b. Propiedad de Inverso Multiplicativo:

Para todo número real no nulo $a \in \mathbb{R}$, existe un número real "1/a" tal que a * (1/a) = 1.

Demostración:

La demostración de la propiedad de inverso multiplicativo se basa en el concepto de multiplicativo inverso. Dado que el producto de un número real con su multiplicativo inverso es igual a uno, podemos afirmar que "1/a" es el multiplicativo inverso de a, ya que a * (1/a) = 1. Por lo tanto, la propiedad de inverso multiplicativo se cumple para los números reales diferentes de cero.

C. Propiedad de Densidad

Los números reales cumplen con la propiedad de densidad, lo que significa que entre cualquier par de números reales siempre existe otro número real.

a. Propiedad de Densidad:

Para todo número real $a, b \in \mathbb{R}$, donde $a < b$, existe un número real $c \in \mathbb{R}$ tal que $a < c < b$.

Demostración:

La demostración de la propiedad de densidad se realiza considerando que entre dos números reales distintos siempre hay infinitos números reales. Dado que $a < b$, podemos tomar un número real "c" que esté entre ambos, y esto es posible debido a que existe una infinidad de números reales entre cualquier par de números reales distintos. Por lo tanto, la propiedad de densidad se cumple para los números reales.

En conclusión, las propiedades y características de los números reales presentadas en este apartado refuerzan su importancia como un conjunto numérico esencial en la matemática y otras áreas del conocimiento. La cerradura bajo las operaciones de suma y multiplicación garantiza que el resultado de operar con números reales también es un número real. Las propiedades de inverso aditivo y multiplicativo aseguran la existencia de aditivos inversos y multiplicativos inversos para cada número real, lo que contribuye a la coherencia y estabilidad de las operaciones algebraicas. Por último, la propiedad de densidad asegura que entre cualquier par de números reales siempre hay otros números reales, facilitando la aproximación y resolución de problemas matemáticos y aplicaciones prácticas.

Palabras clave: números reales, propiedades, características, cerradura, inverso aditivo, inverso multiplicativo, densidad.

CAPÍTULO II

CONSTRUCCIÓN HISTÓRICA DE LOS NÚMEROS REALES

Con el objetivo de explorar las bases históricas que fundamentan la teoría para la definición de números reales, un concepto fundamental en la sólida construcción del conocimiento matemático y de gran relevancia para aquellos que se dedican a la enseñanza de las matemáticas, se han revisado los trabajos de diversos autores que se remontan a los matemáticos griegos de la antigüedad. Estos matemáticos sentaron las bases teóricas para que sus sucesores, en el siglo XIX, pudieran construir la definición del conjunto de los números reales.

El concepto de número ha estado presente desde tiempos muy remotos en la historia de la humanidad. Se han encontrado indicios de que el hombre primitivo ya tenía una noción rudimentaria de los números, como lo sugiere el descubrimiento de un hueso con marcas de conteo que data aproximadamente del año 20.000 a.C., realizado por el belga Jean de Heinzelin de Braucourt en 1960.

A lo largo del tiempo, los números adquirieron un papel fundamental en la vida de las personas, especialmente en el intercambio de productos y bienes. Durante la época de los griegos, el concepto de número adquirió una importancia significativa en el desarrollo de su cultura, especialmente en el campo de la geometría. La teoría de las proporciones de Pitágoras se convirtió en un esquema fundamental para establecer relaciones entre magnitudes y sentó las bases para futuros desarrollos matemáticos.

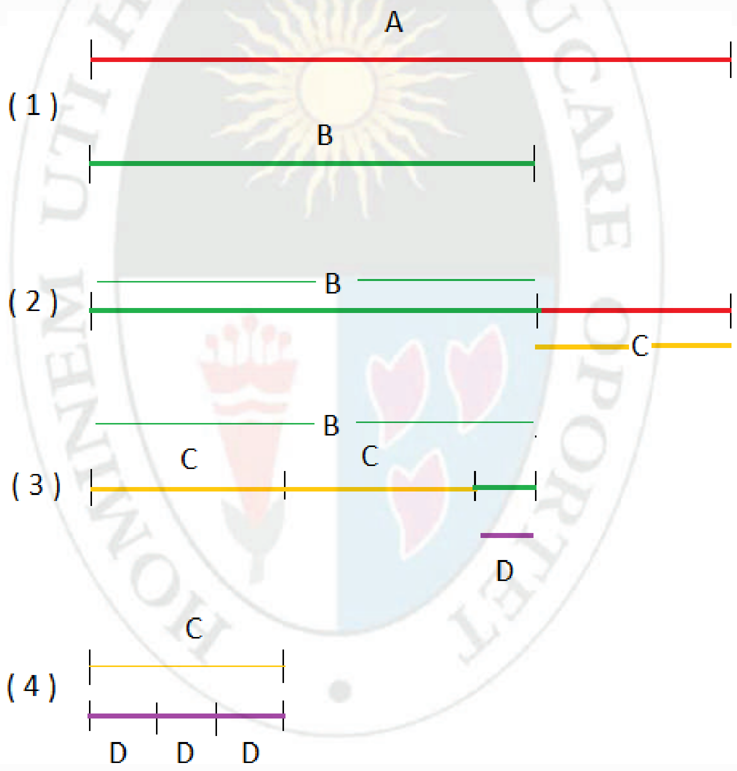
2.1. Conceptos matemáticos importantes en la historia de la matemática

A continuación, se explora y describe los conceptos matemáticos más importantes a lo largo de la historia que dieron lugar a la construcción de los números reales.

A. **Las magnitudes conmensurables e inconmensurables:** Las magnitudes conmensurables e inconmensurables han sido objeto de estudio en las matemáticas desde la antigüedad. Estos conceptos juegan un papel fundamental en la teoría de números y la geometría, y han llevado a importantes avances en el desarrollo de la matemática pura y aplicada. En esta monografía, se explorará en profundidad la diferencia entre magnitudes conmensurables e inconmensurables, se analizarán sus propiedades y se presentarán demostraciones de resultados relevantes. Además, se rastreará la evolución histórica de estos conceptos y se revisarán las contribuciones de destacados matemáticos que han enriquecido el campo de estudio.

Figura 2

Conmensurabilidad entre segmentos



a. Definición de Magnitudes Conmensurables e Inconmensurables

Las magnitudes conmensurables son aquellas que pueden ser expresadas como una relación de números enteros. Es decir, dos magnitudes son conmensurables si existe un número entero que las relaciona de manera exacta. Esta relación se expresa mediante una fracción común, y los números enteros en la fracción representan las medidas de las magnitudes conmensurables en unidades equivalentes.

Por otro lado, las magnitudes inconmensurables son aquellas que no pueden ser expresadas como una relación de números enteros. En otras palabras, no existe un número entero que relacione exactamente estas magnitudes, y no pueden ser expresadas mediante una fracción común.

b. Propiedades de las Magnitudes Conmensurables e Inconmensurables

b.1. Magnitudes Conmensurables

Las magnitudes conmensurables presentan las siguientes propiedades:

- **Propiedad de Proporcionalidad**: Si dos magnitudes son conmensurables, entonces pueden ser comparadas mediante una relación de proporcionalidad, representada por una fracción común.
- **Propiedad de Multiplicación**: La multiplicación de magnitudes conmensurables da como resultado una magnitud conmensurable.
- **Propiedad de Adición**: La suma de magnitudes conmensurables da como resultado una magnitud conmensurable.

b.2. Magnitudes Inconmensurables

Las magnitudes inconmensurables presentan las siguientes propiedades:

- **Propiedad de Inproporcionalidad**: Las magnitudes inconmensurables no pueden ser comparadas mediante una relación de proporcionalidad exacta, y no pueden ser expresadas mediante una fracción común.
- **Propiedad de Irreductibilidad**: Las magnitudes inconmensurables son irreductibles a una relación de números enteros, lo que las hace únicas en su expresión.

c. Demostraciones de Propiedades

- Demostración de la Propiedad de Proporcionalidad

  Sean "a" y "b" dos magnitudes conmensurables, y sea "k" el número entero que las relaciona: $a = k * b$

- Demostración: Como "a" y "b" son conmensurables, existe un número entero "k" tal que "a = k * b". Si dividimos ambos lados de la ecuación por "b", obtenemos: a/b = k

Lo que demuestra que "a/b" es una fracción común, y por lo tanto, las magnitudes son comparables mediante una relación de proporcionalidad.

- Demostración de la Propiedad de Multiplicación
  Sean "a" y "b" dos magnitudes conmensurables:
  a = k1 * c
  b = k2 * c
  Donde "k1" y "k2" son números enteros, y "c" es una magnitud conmensurable.
- Demostración: Si multiplicamos ambas ecuaciones, obtenemos:
  a * b = (k1 * c) * (k2 * c) = k1 * k2 * c^2
  La expresión resultante "k1 * k2 * c^2" es el producto de dos números enteros, lo que implica que "a * b" es una magnitud conmensurable.
- Demostración de la Propiedad de Adición
  Sean "a" y "b" dos magnitudes conmensurables:
  a = k1 * c
  b = k2 * c
  Donde "k1" y "k2" son números enteros, y "c" es una magnitud conmensurable.
- Demostración: Si sumamos ambas ecuaciones, obtenemos:
  a + b = (k1 * c) + (k2 * c) = (k1 + k2) * c
  La expresión resultante "(k1 + k2) * c" es el producto de dos números enteros, lo que implica que "a + b" es una magnitud conmensurable.

2.2 Contribuciones de matemáticos destacados

Eudoxo de Cnido: En la antigüedad, Eudoxo fue uno de los primeros matemáticos en explorar la teoría de magnitudes conmensurables e inconmensurables. Su trabajo sentó las bases para futuros desarrollos en este campo.

Euclides: El famoso matemático griego Euclides también hizo importantes contribuciones a la teoría de magnitudes conmensurables e inconmensurables en su obra *"Los Elementos"*.

Kurt Gödel: En el siglo XX, Gödel exploró la teoría de conjuntos y los fundamentos de las matemáticas, proporcionando nuevas perspectivas sobre las magnitudes conmensurables e inconmensurables.

En conclusión, la distinción entre magnitudes conmensurables e inconmensurables ha sido un tema relevante en las matemáticas a lo largo de la historia. La comprensión de estas propiedades y la realización de demostraciones rigurosas ha sido fundamental para el desarrollo de la teoría de números y la geometría. Los aportes de matemáticos destacados han enriquecido este campo de estudio y han abierto nuevas líneas de investigación y desarrollo matemático.

CAPÍTULO III

MÉTODOS DE CONSTRUCCIÓN DE LOS NÚMEROS REALES

En esta sección, se examinarán los métodos fundamentales utilizados para la construcción rigurosa de los números reales. Estos métodos han sido propuestos por destacados matemáticos y han sido clave para establecer la coherencia y completitud del conjunto de los números reales.

3.1. Método de Dedekind

El Método de Dedekind, propuesto por el matemático Richard Dedekind en el siglo XIX, es uno de los enfoques fundamentales para construir los números reales. Este método se basa en la noción de "corte" de los números racionales. Un corte consiste en dividir el conjunto de los números racionales en dos subconjuntos disjuntos, de manera que todos los elementos en el primer subconjunto son menores que cualquier elemento en el segundo subconjunto. De esta manera, se crea una correspondencia biunívoca entre los cortes y los números reales, lo que permite establecer una base sólida para los números reales y definir operaciones como la suma y multiplicación.

Dedekind, quien se embarcó en la búsqueda de la fundamentación de las matemáticas, se centró en formalizar y generalizar el proceso de aproximación de algunos irracionales a partir de los racionales, dando lugar a su ingenioso método basado en la definición de "cortadura".

Según Dedekind, un subconjunto x de $\mathbb{Q}$ es considerado una cortadura si cumple con las siguientes condiciones:

1. x es diferente de vacío y de $\mathbb{Q}$.
2. Si $q \in x$ y $r < q$, entonces r también pertenece a x (cerradura hacia abajo).
3. El máximo de x no existe.

Esta fascinante construcción de cortaduras de Dedekind da forma al conjunto de los números reales, denotado como R = $\{x$: es una cortadura de Dedekind$\}$. En este ámbito, el orden entre los números reales, representado por el símbolo $x < y$, se establece de manera lineal.

Uno de los pilares de esta teoría es la completitud de lo que implica que, si A es un subconjunto no vacío y está acotado superiormente, entonces el supremo de A existe y es un elemento. El supremo de un conjunto, representado por $\cup A$, es el valor más alto dentro de ese conjunto.

Para demostrar que $\cup A$ es el supremo de A, se verifica que cumple con ciertas condiciones. Por ejemplo, si $x \in A$, entonces $x \leq \cup A$, lo que implica que $\cup A$ es una cota superior de A. Asimismo, se demuestra que $\cup A$ no es vacío, ya que los elementos de A son cortaduras, que por definición no son conjuntos vacíos. Además, al ser A acotado, $\cup A$ también lo es, lo cual asegura que $\cup A$ sea un número real diferente de $\mathbb{Q}$.

La suma de números reales, definida como $x + y = \{q + r: q, r \in \mathbb{Q}, q \in x \text{ o } r \in y\}$, ha sido objeto de estudio para verificar su asociatividad, conmutatividad, módulo, inverso y otras propiedades interesantes.

Otra cuestión relevante es el valor absoluto de un número real x, dado por $|x| = x \cup -x$. Esto siempre es mayor que cero y nos permite clasificar los números reales como positivos o negativos según su signo.

A continuación, se detalla una descripción más completa del proceso del Método de Dedekind.

3.2 Definición de un Corte de Dedekind

Un corte de Dedekind es una partición del conjunto de números racionales Q en dos subconjuntos no vacíos A y B, de tal manera que todo elemento de A es menor que todo elemento de B, y A no contiene el mayor número (Dedekind, 1872).

3.3 Proceso del Método de Dedekind

3.3.1 Definición del corte: Para comenzar, seleccionamos un número real arbitrario, al que llamaremos "r". A partir de este número, definimos dos conjuntos: A y B. El conjunto A contiene todos los números racionales "q" que son estrictamente menores que "r", es decir, $A = \{q \in Q \mid q < r\}$. Por otro lado, el conjunto B contiene el número "r" y todos los números racionales "q" que son mayores o iguales que "r", es decir, $B = \{q \in Q \mid q \geq r\}$.

3.3.2 Creación del corte: Una vez que hemos definido los conjuntos A y B, creamos un corte de Dedekind (A, B) utilizando estos conjuntos. Este corte divide el conjunto de números racionales Q en dos subconjuntos no vacíos, donde A contiene todos los números racionales menores que "r" y B contiene "r" y todos los números racionales mayores o iguales que "r".

3.3.3. **Verificación del corte**: Para que este corte sea válido según el Método de Dedekind, debemos verificar que cumple con las siguientes propiedades:

a. **A es no vacío**: Esto significa que el conjunto A debe contener al menos un número racional menor que "r". En otras palabras, debe existir al menos un número "q" en A tal que $q < r$.

b. **B es no vacío**: Similarmente, el conjunto B debe contener al menos un número racional mayor o igual que "r". En otras palabras, debe existir al menos un número "q" en B tal que $q \geq r$.

c. **Todo número en A es menor que todo número en B**: Esta propiedad establece que para cualquier número "p" en A y cualquier número "q" en B, se cumple que $p < q$. En otras palabras, todos los números en A son estrictamente menores que todos los números en B.

d. **no tiene un máximo**: Esta propiedad implica que no existe un número racional máximo en el conjunto A. En otras palabras, no hay un número "p" en A tal que para cualquier número "q" en A, se cumpla que $p < q$.

e. **B no tiene un mínimo**: Esta propiedad implica que no existe un número racional mínimo en el conjunto B. En otras palabras, no hay un número "q" en B tal que para cualquier número "p" en B, se cumpla que $p > q$

3.3.4. **Definición del número real**: Una vez que hemos verificado que el corte (A, B) cumple con todas las propiedades de un corte de Dedekind, podemos definir el número real "r" como el número correspondiente a este corte de Dedekind. En otras palabras, el número real "r" representa el conjunto de todos los números racionales menores que "r" (A) y el número "r" junto con todos los números racionales mayores o iguales que "r" (B).

3.3.5. **Propiedades de los números reales**: A partir de la definición del número real "r" como un corte de Dedekind, podemos demostrar varias propiedades de los números reales. Algunas de estas propiedades incluyen la existencia de números irracionales, la densidad de los números racionales e irracionales en la recta real, y la existencia de supremos e ínfimos para conjuntos acotados.

3.3.6. Orden total de los cortes de Dedekind: Una propiedad importante de los cortes de Dedekind es que se pueden comparar entre sí. Dados dos cortes de Dedekind (A, B) y (C, D), decimos que el corte (A, B) es menor o igual que el corte (C, D) si A está contenido en C. Esto establece un orden total en el conjunto de todos los cortes de Dedekind.

3.3.7. Correspondencia biunívoca entre cortes de Dedekind y números reales: Una de las contribuciones clave del Método de Dedekind es establecer una correspondencia biunívoca entre los cortes de Dedekind y los números reales. Esto significa que cada número real tiene asociado un único corte de Dedekind, y viceversa. Esta correspondencia permite identificar los números reales con los cortes de Dedekind y utilizar los cortes como una representación de los números reales.

3.3.8. Operaciones aritméticas con cortes de Dedekind: Una vez que hemos establecido la correspondencia entre los cortes de Dedekind y los números reales, podemos realizar operaciones aritméticas con los cortes. Por ejemplo, la suma de dos cortes de Dedekind se define como la suma de los conjuntos A y B correspondientes a los cortes. De manera similar, se pueden definir la resta, multiplicación y división de cortes de Dedekind.

3.3.9. Propiedades de los números reales a partir de los cortes de Dedekind: A partir de las operaciones aritméticas con los cortes de Dedekind, podemos demostrar las propiedades fundamentales de los números reales, como la conmutatividad, asociatividad y distributividad de las operaciones, así como las propiedades de orden y la existencia de inversos aditivos y multiplicativos.

3.3.10. Aplicaciones del Método de Dedekind: El Método de Dedekind ha sido ampliamente utilizado en el estudio de la teoría de los números reales y en otros campos de las matemáticas. Se ha utilizado para demostrar resultados importantes, como el teorema de la existencia de raíces n-ésimas y el teorema de la existencia de soluciones de ecuaciones algebraicas.

En resumen, el Método de Dedekind proporciona un enfoque riguroso para definir los números reales utilizando cortes de Dedekind. Este método establece una correspondencia biunívoca entre los cortes de Dedekind y los números reales, lo que permite realizar operaciones aritméticas y demostrar propiedades fundamentales de los números reales. El Método de Dedekind ha sido una contribución fundamental en el desarrollo de la teoría de los números reales y sigue siendo un tema importante en el estudio de las matemáticas.

3.4. Método de Cauchy

El Método de Cauchy, desarrollado por Augustin-Louis Cauchy en el siglo XIX, es un enfoque fundamental para la construcción de los números reales basado en el concepto de sucesiones de números racionales. Este método establece una base teórica sólida para los números reales y demuestra la existencia de números reales a partir de las sucesiones de números racionales.

El método de Cauchy se basa en la idea de que un número real puede aproximarse arbitrariamente mediante una sucesión de números racionales. Es decir, para cada número real "x", podemos encontrar una sucesión de números racionales (xn) tal que la distancia entre "x" y cada término de la sucesión se vuelve arbitrariamente pequeña a medida que avanzamos en la sucesión.

Formalmente, una sucesión de números racionales (xn) se considera una sucesión de Cauchy si para cualquier número real positivo $\varepsilon > 0$, existe un número natural N tal que la diferencia entre dos términos de la sucesión es menor que ε para todo n, m ≥ N:

$$|x_n - x_m| < \varepsilon \text{ para todo } n, m \geq N$$

La idea clave es que a medida que avanzamos en la sucesión, la diferencia entre términos consecutivos se vuelve cada vez más pequeña, lo que refleja la idea de que la sucesión se "acumula" en un número real.

Demostración de la Completitud de los números reales según Cauchy:

La demostración de la completitud de los números reales según el Método de Cauchy consiste en demostrar que toda sucesión de Cauchy en los números racionales converge a un número real. Es decir, dada una sucesión de Cauchy (x_n), debemos demostrar que existe un número real "x" tal que la sucesión converge a "x".

Para demostrar esto, se requiere mostrar que la sucesión (xn) se acerca cada vez más a un valor límite "x" a medida que avanzamos en la sucesión. Esto implica que la diferencia entre cada término de la sucesión y "x" debe volverse arbitrariamente pequeña cuando n tiende a infinito.

Supongamos que tenemos una sucesión de Cauchy (x_n) en los números racionales. Queremos demostrar que esta sucesión converge a un número real "x".

Dado que tenemos una sucesión de Cauchy, para cualquier número real positivo $\varepsilon > 0$, existe un número natural N tal que para todo $n, m \geq N$ se cumple:

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

La idea central de la demostración es utilizar la propiedad de densidad de los números racionales en los números reales. Esta propiedad establece que entre cualquier par de números reales siempre existe otro número real.

Para cada n, podemos considerar el conjunto de términos de la sucesión desde el término x_n en adelante:

$$A_n = \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}$$

Este conjunto está formado por los términos de la sucesión a partir de un cierto índice n. Dado que tenemos una sucesión de Cauchy, para cualquier $\varepsilon > 0$, podemos encontrar un número natural N tal que la diferencia entre cualquier par de términos en A_n es menor que ε:

$$|x_i - x_j| < \varepsilon \text{ para todo } i, j \geq N$$

Ahora, consideremos el conjunto de todos los términos de la sucesión (x_n) desde el primer término hasta el término N:

$$B = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N\}$$

Dado que tenemos un número finito de términos en B, podemos encontrar el máximo de todas las diferencias entre estos términos:

$$D = \max\{|x_i - x_j|\} \text{ para todo } i, j \leq N$$

Tomemos $\varepsilon = D/2$. Dado que D es el máximo de todas las diferencias entre los términos en B, podemos afirmar que:

$|x_i - x_j| < D/2$ para todo i, j ≤ N

Esto implica que:

$|xi - xj| < \varepsilon$ para todo i, j ≤ N

Ahora, consideremos el conjunto $C = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_N\}$ junto con el intervalo abierto

$(x_N - \varepsilon, x_N + \varepsilon)$. Como $\varepsilon = D/2$, esto significa que:

$(x_N - \varepsilon, x_N + \varepsilon) = (x_N - D/2, x_N + D/2)$

Dado que D es el máximo de todas las diferencias entre los términos en B, podemos afirmar que todos los términos en B se encuentran dentro del intervalo $(x_N - \varepsilon, x_N + \varepsilon)$.

Además, hemos demostrado previamente que para todo n, m ≥ N, se cumple $|x_n - x_m| < \varepsilon$. Esto significa que todos los términos en A_n también se encuentran dentro del intervalo

$(x_N - \varepsilon, x_N + \varepsilon)$.

Por lo tanto, hemos demostrado que todos los términos de la sucesión (x_n) están contenidos en el intervalo $(x_N - \varepsilon, x_N + \varepsilon)$ para algún valor N.

Ahora, dado que hemos demostrado que todos los términos de la sucesión (x_n) están contenidos en un intervalo arbitrariamente pequeño, podemos considerar el punto medio de este intervalo como una aproximación del límite de la sucesión. Es decir, consideramos el número real "x" tal que:

$x = (x_N - \varepsilon, x_N + \varepsilon) / 2 = x_N$

Dado que todos los términos de la sucesión están contenidos en el intervalo $(x_N - \varepsilon, x_N + \varepsilon)$, podemos afirmar que $|x_n - x| < \varepsilon$ para todo n ≥ N.

Esto implica que la sucesión (x_n) converge a "x" cuando n tiende a infinito. Dado que "x" es un número real arbitrario y la sucesión (x_n) es una sucesión de Cauchy arbitraria, hemos demostrado que toda sucesión de Cauchy en los números racionales converge a un número real "x".

Por lo tanto, el Método de Cauchy establece la completitud de los números reales al demostrar que cualquier sucesión de Cauchy en los números racionales converge a un número real. Esto finaliza la demostración del Método de Cauchy para la construcción de los números reales.

3.5. Método de Cantor

Cantor basa su construcción principalmente en la definición de sucesiones de Cauchy en los racionales, las cuales identifica con los números reales.

En este sentido, Cantor define las operaciones de suma y producto, así como la relación de orden, en el dominio de las sucesiones de Cauchy, conformando así un cuerpo totalmente ordenado que contiene un subcuerpo isomorfo a $\mathbb{Q}$. Esta condición es esencial para extender los números racionales $\mathbb{Q}$ al conjunto de los números reales.

Luego, siguiendo a López (2008), se procede a definir no solo una sucesión de Cauchy de racionales, sino una sucesión de Cauchy cuyos elementos son a su vez sucesiones de Cauchy. De esta manera, se forma un nuevo dominio al que llamaremos C, que contiene un subcuerpo isomorfo a $\mathbb{Q}$.

En C, una sucesión es convergente si y solo si es una sucesión de Cauchy, y las sucesiones de Cauchy en C tienen un límite en C. Esto implica que la operación realizada para extender $\mathbb{Q}$ a C no permite una extensión adicional, sino que al aplicarla sobre C, se mantiene en el mismo dominio C. Por tanto, C es completo y C ≡.

Es importante destacar que la exposición anterior se presenta a grandes rasgos, ya que más adelante se abordará la demostración realizada por Thomas Blyth, que se basa esencialmente en la propuesta de Cantor. Por esta razón, es pertinente no profundizar en la construcción de los números reales por Cantor, sino centrarnos en la demostración proporcionada por Blyth. Así, podremos comprender de manera más detallada y rigurosa el proceso de extensión de los racionales a los números reales.

A continuación, se detalla de forma más completa el Método de Cantor, basado en la definición de las sucesiones de Cauchy en los racionales, las cuales son identificadas con los números reales.

3.5.1 **Definición de los números racionales**:

Los números racionales se definen como el conjunto de todas las fracciones de la forma a/b, donde a y b son números enteros y $b \neq 0$.

3.5.2. **Definición de sucesiones de Cauchy:**

Una sucesión de Cauchy en los números racionales es una sucesión $\{a_n\}$ tal que para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un número natural N tal que para todo $m, n \geq N$, se cumple

$|a_m - a_n| < \varepsilon$.

3.5.3. **Identificación de sucesiones de Cauchy con números reales:**

Cantor propuso identificar cada sucesión de Cauchy en los números racionales con un número real. Para ello, se considera el conjunto de todas las sucesiones de Cauchy y se define una relación de equivalencia entre ellas. Dos sucesiones de Cauchy $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ se consideran equivalentes si la diferencia entre sus términos tiende a cero, es decir, $\lim(n\to\infty)\ |a_n - b_n| = 0$.

3.5.4 **Construcción de los números reales:**

El conjunto de los números reales se define como el conjunto de todas las clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy en los números racionales. Cada número real se representa por una sucesión de Cauchy equivalente.

3.5.5 **Operaciones en los números reales:**

Las operaciones de suma, resta, multiplicación y división se definen en los números reales mediante operaciones correspondientes en las sucesiones de Cauchy. Se demuestra que estas operaciones están bien definidas y cumplen las propiedades de los números reales.

En conclusión, el Método de Cantor proporciona una construcción rigurosa de los números reales a partir de los números racionales, basándose en la noción de sucesiones de Cauchy. Este método permite extender el conjunto de los números racionales para incluir números como la raíz cuadrada de 2 o el número π, que no pueden ser representados como fracciones. La construcción de los números reales mediante el Método de Cantor es fundamental en el estudio de la teoría de los números y tiene aplicaciones en diversos campos de las matemáticas y la física.

3.6. Método de Hilbert

Hilbert, reconocido por su moderna axiomatización de los números reales, plantea, según Arboleda (2011), dos enfoques para considerar a:

a) El método genético, que implica extensiones sucesivas del cuerpo numérico hasta llegar a las cortaduras o sucesiones fundamentales.
b) El método axiomático, que parte de un dominio de objetos que cumplen un sistema de axiomas que rigen sus relaciones, demostrando así la consistencia y completitud del sistema.

La construcción de los números reales se basa en una serie de axiomas que establecen las propiedades fundamentales del conjunto numérico. Kline (1992) propone un conjunto de axiomas de conexión que agrupan las operaciones de adición y multiplicación, así como la existencia de elementos inversos y el elemento neutro para ambas operaciones. A continuación, se presentan en detalle los axiomas de conexión:

3.6.1 Axiomas de Conexión:

a) **Operación de Adición**: El conjunto de los números reales (K) está cerrado bajo la operación de adición. Esto significa que la suma de dos números reales siempre da como resultado otro número real.

Demostración: La demostración de que el conjunto de los números reales está cerrado bajo la operación de adición se basa en la definición de los números reales como una extensión de los números racionales, lo que implica que la suma de dos números racionales es otro número racional y, por lo tanto, es un número real.

b) Existencia y Unicidad de Elementos Inversos: Para cada número real "a" en K, existe un número real "-a" que cumple con la propiedad "a + (-a) = 0", donde "0" es el elemento neutro aditivo. Además, este inverso es único, lo que significa que no hay otro número real que cumpla con esta propiedad para el mismo "a".

Demostración: La existencia del elemento inverso para cada número real "a" se basa en la propiedad de los números reales como un cuerpo ordenado, donde cada número real tiene un opuesto aditivo único. La unicidad se demuestra suponiendo que existen dos elementos inversos "-a" y "-b" para el mismo número real "a", y luego se llega a una contradicción que demuestra que "-a" debe ser igual a "-b".

c) Existencia del Elemento Neutro Aditivo: El conjunto de los números reales tiene un elemento neutro aditivo, denotado como "0", que cumple con la propiedad "a + 0 = a" para cualquier número real "a" en K.

Demostración: La existencia del elemento neutro aditivo "0" se demuestra mediante la definición de los números reales, que incluye a los números enteros, y el cero es el número entero que cumple con la propiedad de ser el elemento neutro aditivo.

d) Operación de Multiplicación: El conjunto de los números reales (K) está cerrado bajo la operación de multiplicación. Esto significa que el producto de dos números reales siempre da como resultado otro número real.

Demostración: La demostración de que el conjunto de los números reales está cerrado bajo la operación de multiplicación se basa en la propiedad de los números reales como un cuerpo, donde el producto de dos números reales es otro número real.

e) Existencia y Unicidad de Elementos Inversos en la Multiplicación: Para cada número real "a" en K, diferente de cero, existe un número real "1/a" que cumple con la propiedad "a * (1/a) = 1", donde "1" es el elemento neutro multiplicativo. Además, este inverso es único, no hay otro número real que cumpla con esta propiedad para el mismo "a".

Demostración: La existencia del elemento inverso en la multiplicación para cada número real "a" diferente de cero se basa en la propiedad de los números reales como un cuerpo, donde cada número real no nulo tiene un inverso multiplicativo único. La unicidad se demuestra de manera similar a la demostración para la adición, suponiendo que existen dos elementos inversos "1/a" y "1/b" para el mismo número real "a", y luego llegando a una contradicción que demuestra que "1/a" debe ser igual a "1/b".

f) Existencia del Elemento Neutro Multiplicativo: El conjunto de los números reales tiene un elemento neutro multiplicativo, denotado como "1", que cumple con la propiedad
"a * 1 = a" para cualquier número real "a" en K.

Demostración: La existencia del elemento neutro multiplicativo "1" se demuestra mediante la definición de los números reales, que incluye a los números racionales, y "1" es el número racional que cumple con la propiedad de ser el elemento neutro multiplicativo.

3.6.2. Axiomas de Cálculo:

a) Asociatividad de la Adición: Para cualquier conjunto de números reales "a", "b" y "c" en K, la adición es asociativa, es decir, se cumple la propiedad "(a + b) + c = a + (b + c)". Esto significa que el resultado de la suma de tres números reales es independiente del orden en que se realicen las adiciones.

La asociatividad de la adición se puede demostrar utilizando la propiedad de asociatividad de la suma de números racionales, que se hereda en los números reales debido a su construcción como una extensión de los números racionales.

c) **Conmutatividad de la Adición**: Para cualquier conjunto de números reales "a" y "b" en K, la adición es conmutativa, lo que implica que "a + b = b + a". Esta propiedad establece que el resultado de la suma de dos números reales es el mismo, independientemente del orden en que se sumen.

La conmutatividad de la adición se puede demostrar utilizando la propiedad de conmutatividad de la suma de números racionales, que también se conserva en los números reales.

d) **Asociatividad de la Multiplicación**: Para cualquier conjunto de números reales "a", "b" y "c" en K, la multiplicación es asociativa, lo que significa que se cumple la propiedad "(a * b) * c = a * (b * c)". Esta propiedad asegura que el resultado de la multiplicación de tres números reales es independiente del orden en que se realicen las multiplicaciones.

La asociatividad de la multiplicación se puede demostrar utilizando la propiedad de asociatividad del producto de números racionales, que se mantiene en los números reales debido a su definición.

e) **Distributividad de la Multiplicación respecto a la Adición**: Para cualquier conjunto de números reales "a", "b" y "c" en K, la multiplicación se distribuye respecto a la adición, lo que implica que "a * (b + c) = (a * b) + (a * c)". Esta propiedad permite expandir la multiplicación de un número real por la suma de otros dos números reales.

La distributividad de la multiplicación respecto a la adición se puede demostrar utilizando la propiedad de distributividad del producto respecto a la suma en los números racionales, que también se cumple en los números reales.

f) **Distributividad de la Adición respecto a la Multiplicación**: Para cualquier conjunto de números reales "a", "b" y "c" en K, la adición se distribuye respecto a la multiplicación, lo que significa que "(a + b) * c = (a * c) + (b * c)". Esta propiedad permite expandir la suma de dos números reales multiplicada por otro número real.

La distributividad de la adición respecto a la multiplicación se puede demostrar utilizando la propiedad de distributividad de la suma respecto al producto en los números racionales, que se extiende a los números reales.

g) **Conmutatividad de la Multiplicación**: Para cualquier conjunto de números reales "a" y "b" en K, la multiplicación es conmutativa, lo que implica que "a * b = b * a". Esta propiedad asegura que el resultado del producto de dos números reales es el mismo, independientemente del orden en que se multipliquen.

La conmutatividad de la multiplicación se puede demostrar utilizando la propiedad de conmutatividad del producto de números racionales, que también se conserva en los números reales.

3.6.3. Axiomas de Orden:

a) Relación de Orden entre Números Diferentes:

En el conjunto de números reales K, se establece una relación de orden denotada por "≤". Para cualquier par de números reales diferentes "a" y "b" en K, uno de los siguientes casos se cumple:

a) a ≤ b: Esto indica que el número real "a" es menor o igual que el número real "b".

b) b ≤ a: Esto indica que el número real "b" es menor o igual que el número real "a".

Esta relación de orden es reflexiva, antisimétrica y transitiva, lo que implica que para cualquier número real "a" en K, se cumple que a ≤ a (reflexividad), y si a ≤ b y b ≤ a, entonces a = b (antisimetría), y si a ≤ b y b ≤ c, entonces a ≤ c (transitividad).

b) Transitividad de la Relación de Orden:

Para cualquier conjunto de números reales "a", "b" y "c" en K, si a ≤ b y b ≤ c, entonces a ≤ c. Esta propiedad, conocida como transitividad de la relación de orden, asegura que si un número real está relacionado con otro número real y este último está relacionado con un tercer número real, entonces el primero también está relacionado con el tercer número real.

c) Preservación del Orden por la Adición:

Para cualquier conjunto de números reales "a", "b" y "c" en K, si a ≤ b, entonces a + c ≤ b + c. Esta propiedad establece que la adición de un número real positivo "c" a ambos lados de una desigualdad no altera la relación de orden entre los números reales.

d) Preservación del Orden por la Multiplicación:

Para cualquier conjunto de números reales "a", "b" y "c" en K, si a ≤ b y c ≥ 0, entonces a * c ≤ b * c. Esta propiedad asegura que la multiplicación de ambos lados de una desigualdad por un número real no negativo "c" preserva la relación de orden entre los números reales.

3.6.4 Axiomas de Continuidad:

a) **Axioma de Arquímedes:**

El Axioma de Arquímedes establece que en el conjunto de números reales K, no existe un número real que sea infinitamente mayor que todos los demás números reales. Formalmente, para cualquier número real positivo "x" en K y cualquier número real "y" en K, existe un número natural "n" tal que "$nx > y$". Este axioma garantiza que no hay "agujeros" en el conjunto de números reales, y que se puede encontrar una cantidad suficientemente grande de veces un número real positivo que supere cualquier otro número real en el conjunto.

Demostración: Supongamos que existe un número real positivo "x" en K tal que no existe un número natural "n" que cumpla "$nx > y$" para cualquier número real "y" en K. Esto implicaría que "x" sería infinitamente mayor que todos los demás números reales en K, lo cual contradice el Axioma de Arquímedes. Por lo tanto, para cualquier número real positivo "x" en K y cualquier número real "y" en K, siempre existe un número natural "n" tal que "$nx > y$".

b) **Axioma de Completitud:**

El Axioma de Completitud, también conocido como Axioma del Supremo, es una propiedad fundamental del conjunto de números reales K. Este axioma asegura que todo conjunto no vacío y acotado superiormente en los números reales tiene un supremo, es decir, un límite superior que es el número real más pequeño que es mayor o igual que todos los elementos del conjunto. Formalmente, para cualquier conjunto no vacío "A" en K que está acotado superiormente, existe un número real "x" en K tal que "$x \geq a$" para todo "a" en "A", y cualquier otro número real "y" que cumpla "$y > x$" no satisface la propiedad anterior para "a" en "A".

Demostración: Consideremos un conjunto no vacío "A" en K que está acotado superiormente por un número real "b". Si el conjunto "A" contiene un único elemento, entonces "b" es el supremo de "A". Si el conjunto "A" contiene más de un elemento, podemos construir una sucesión que se aproxime al supremo de "A". Por el Axioma de Completitud, existe un número real "x" en K tal que "$x \geq a$" para todo "a" en "A", y cualquier otro número real "y" que cumpla "$y > x$" no satisface la propiedad anterior para "a" en "A". Por lo tanto, "x" es el supremo de "A" y el Axioma de Completitud se cumple en el conjunto de números reales K.

Arboleda (2011) destaca que Hilbert considera que el método genético tiene valor pedagógico y heurístico, mientras que el método axiomático es más adecuado para la investigación lógica sobre los fundamentos de las matemáticas y sus aplicaciones. Además, Hilbert se centra en estudiar las condiciones que garanticen la consistencia lógica de los axiomas de una teoría, para asegurar que el sistema sea lógicamente consistente. Para Hilbert, la existencia matemática de los números reales depende de demostrar la no contradicción de los axiomas que establecen su estructura como un cuerpo ordenado arquimediano y completo. Hilbert sabía que el concepto de número real no se podía reducir lógicamente y que era necesario considerar el recurso a una donación intuitiva de la sucesión de números y de la multiplicidad de magnitudes. A diferencia de las concepciones de Dedekind, Frege y otros logicistas, Hilbert estaba convencido de que ciertas representaciones e ideas intuitivas son previamente necesarias para la posibilidad del conocimiento científico" (p. 27).

Con estas perspectivas en mente, se profundizará en el trabajo de Hilbert y su enfoque axiomático, explorando la coherencia y fundamentos de los números reales en esta monografía.

3.7. Otros métodos de construcción

Además de los métodos de Dedekind, Cauchy, Cantor y Hilbert, el vasto mundo de las matemáticas ha dado lugar a otros enfoques menos conocidos, pero igualmente interesantes para la construcción de los números reales. Estos métodos presentan diversas perspectivas y enfoques que complementan y enriquecen nuestra comprensión de la construcción de este importante conjunto numérico.

Algunos de estos métodos son variaciones o extensiones de los enfoques mencionados anteriormente, buscando explorar diferentes aspectos de la completitud y consistencia de los números reales. Estos enfoques permiten abordar la construcción desde distintos ángulos, ofreciendo una visión más amplia y matizada de este apasionante campo matemático.

Por otro lado, algunos enfoques pueden estar fundamentados en propiedades geométricas o topológicas de los números reales. Estudiar cómo los conceptos topológicos se entrelazan con la construcción de los números reales nos brinda una comprensión más profunda de la estructura interna de este conjunto y de cómo se relaciona con el espacio que lo rodea.

En el capítulo siguiente, nos adentraremos en las propiedades topológicas y algebraicas para abordar de manera más exhaustiva y completa la construcción de los números reales. Nos enfocaremos en analizar detalladamente las características fundamentales que definen la topología de los números reales, lo que nos permitirá apreciar su estructura y comportamiento en un contexto topológico.

Además, exploraremos las conexiones entre la topología y la construcción de los números reales, comprenderemos cómo la topología puede influir en la definición y estudio de los números reales y cómo esta disciplina matemática enriquece la comprensión de los métodos de construcción utilizados históricamente.

A través de un enfoque riguroso y detallado, buscamos proporcionar una visión más completa y profunda sobre los fundamentos de los números reales y su construcción, permitiendo a los lectores adentrarse en un mundo matemático de riqueza y elegancia que ha fascinado a matemáticos y científicos a lo largo de la historia. Con este análisis enriquecido de los métodos de construcción y las propiedades topológicas, esperamos que esta monografía se convierta en una valiosa fuente de conocimiento y una inspiración para futuras investigaciones en el apasionante campo de los números reales.

CAPÍTULO IV

PRELIMINARES TOPOLÓGICOS EN LA CONSTRUCCIÓN DE LOS NÚMEROS REALES

4.1. Conceptos básicos de topología

Dentro del contexto de la construcción de los números reales, es esencial adentrarnos en los conceptos básicos de topología, una rama de las matemáticas que estudia las propiedades geométricas y espaciales de los conjuntos. Estos conceptos fundamentales nos permiten establecer relaciones de cercanía y continuidad entre los elementos del espacio numérico, lo que resulta crucial para comprender la estructura y propiedades de los números reales.

Entre los conceptos básicos de topología que merecen especial atención en nuestra investigación, se encuentran:

a) **Conjuntos Abiertos y Cerrados:**

Dentro del contexto de la topología, el estudio de conjuntos abiertos y cerrados es esencial para comprender las propiedades de cercanía y continuidad entre los elementos de un espacio topológico. Un conjunto se considera abierto si todos sus puntos están contenidos en el espacio y, además, existen conjuntos que cumplen ciertas propiedades de cercanía respecto a los puntos del conjunto. Por otro lado, un conjunto se considera cerrado si incluye todos sus puntos límite, es decir, aquellos puntos hacia los cuales podemos acercarnos desde el conjunto y aún pertenecer a él.

Ejemplo de Conjunto Abierto:

Supongamos que estamos trabajando en el espacio topológico de los números reales y tenemos el conjunto abierto (0, 5). Este conjunto contiene todos los números reales mayores que 0 y menores que 5, pero no incluye los puntos 0 ni 5. Para cualquier punto dentro del intervalo (0, 5), siempre podemos encontrar una vecindad alrededor de ese punto que esté completamente contenida en el conjunto, cumpliendo así la definición de conjunto abierto.

Ejemplo de Conjunto Cerrado:

Consideremos el conjunto cerrado [0, 1], también en el espacio de los números reales. Este conjunto incluye todos los números reales entre 0 y 1, incluyendo los puntos extremos 0 y 1. Cualquier punto límite, como 0 y 1, también está contenido en el conjunto [0, 1]. Por lo tanto, este conjunto satisface la propiedad de ser cerrado.

b) **Propiedades y relaciones:**

Es importante destacar que los conjuntos abiertos y cerrados están estrechamente relacionados en un espacio topológico. Por ejemplo, un conjunto puede ser abierto, cerrado, ambos o ninguno de ellos. En algunos casos, un conjunto puede ser simultáneamente abierto y cerrado, como en el ejemplo del conjunto de los números reales en sí mismo. Tanto el conjunto de los números reales como su complemento (todos los números reales que no están en el conjunto) son conjuntos abiertos y cerrados al mismo tiempo.

c) **Demostración de la Propiedad de Cerrado**:

Para demostrar que un conjunto es abierto en un espacio topológico, debemos verificar que cada punto del conjunto tiene una vecindad completamente contenida dentro del conjunto. La demostración varía dependiendo del conjunto específico y el espacio topológico en el que se encuentre. Aquí proporcionaré una demostración general para un conjunto abierto en el espacio topológico de los números reales utilizando la topología estándar.

Supongamos que tenemos un conjunto abierto A en el espacio topológico de los números reales. Tomemos un punto "p" que pertenece al conjunto A. Queremos demostrar que existe una vecindad de "p" completamente contenida en A.

Dado que A es un conjunto abierto, para cada punto "p" en A, hay un intervalo abierto (a, b) que contiene a "p" y está contenido en A. Por ejemplo, podemos definir una vecindad de "p" de la siguiente manera:

Vecindad de "p": (p - δ, p + δ), donde δ es un número positivo lo suficientemente pequeño para asegurar que el intervalo esté contenido dentro de A.

Ahora debemos demostrar que esta vecindad está completamente contenida en A. Tomemos un punto "x" dentro de la vecindad (p - δ, p + δ). Queremos mostrar que "x" también está en A.

Dado que "x" está dentro del intervalo (p - δ, p + δ), tenemos la siguiente relación:
p - δ < x < p + δ

Debido a que A es un conjunto abierto y (p - δ, p + δ) está contenido en A, esto implica que "x" también debe estar en A. Por lo tanto, hemos demostrado que cada punto "p" en A tiene una vecindad (p - δ, p + δ) completamente contenida en A.

Como esta demostración se aplica a cualquier punto "p" en A, hemos demostrado que A es un conjunto abierto en el espacio topológico de los números reales.

En resumen, la propiedad de ser abierto en un espacio topológico implica que cada punto del conjunto tiene una vecindad completamente contenida dentro del conjunto. Esta propiedad es esencial en el estudio de la topología y es fundamental para comprender cómo se establecen las relaciones de cercanía y continuidad entre los elementos de un espacio topológico.

d) **Demostración de la Propiedad de Abierto:**

Supongamos que tenemos un conjunto abierto A en el espacio topológico de los números reales. Tomemos un punto "p" que pertenece al conjunto A. Queremos demostrar que existe una vecindad de "p" completamente contenida en A.

Dado que A es un conjunto abierto, para cada punto "p" en A, hay un intervalo abierto (a, b) que contiene a "p" y está contenido en A. Por ejemplo, podemos definir una vecindad de "p" de la siguiente manera:

Vecindad de "p": ($p - \delta$, $p + \delta$), donde δ es un número positivo lo suficientemente pequeño para asegurar que el intervalo esté contenido dentro de A.

Ahora debemos demostrar que esta vecindad está completamente contenida en A. Tomemos un punto "x" dentro de la vecindad ($p - \delta$, $p + \delta$). Queremos mostrar que "x" también está en A.

Dado que "x" está dentro del intervalo ($p - \delta$, $p + \delta$), tenemos la siguiente relación:
$p - \delta < x < p + \delta$

Debido a que A es un conjunto abierto y ($p - \delta$, $p + \delta$) está contenido en A, esto implica que "x" también debe estar en A. Por lo tanto, hemos demostrado que cada punto "p" en A tiene una vecindad ($p - \delta$, $p + \delta$) completamente contenida en A.

Como esta demostración se aplica a cualquier punto "p" en A, hemos demostrado que A es un conjunto abierto en el espacio topológico de los números reales.

En resumen, la propiedad de ser abierto en un espacio topológico implica que cada punto del conjunto tiene una vecindad completamente contenida dentro del conjunto. Esta propiedad es esencial en el estudio de la topología y es fundamental para comprender cómo se establecen las relaciones de cercanía y continuidad entre los elementos de un espacio topológico.

También el estudio de conjuntos abiertos y cerrados en la topología es fundamental para comprender cómo se definen las propiedades de cercanía y continuidad en un espacio topológico. Estos conceptos nos permiten analizar la estructura y comportamiento de los elementos en un espacio, lo que tiene importantes implicaciones en diversos campos de las matemáticas y otras disciplinas científicas.

4.2. Vecindad y entorno en topología

En el contexto de la construcción de los números reales y en general en un espacio topológico, la noción de vecindad y entorno es fundamental para entender la idea de proximidad y continuidad entre los elementos del espacio. Estos conceptos se basan en la definición de conjuntos abiertos y son cruciales para el análisis topológico de los números reales y otros espacios.

a) **Vecindad de un punto "a":**

Una vecindad de un punto "a" es un conjunto abierto que contiene al punto "a". Es decir, si "N" es una vecindad de "a", entonces "a" pertenece a "N" y "N" es un conjunto abierto en el espacio topológico. La vecindad de un punto es esencial para expresar la idea de cercanía y proximidad entre los elementos de un conjunto.

b) **Entorno de un punto "a":**

Un entorno de un punto "a" es un conjunto abierto que puede ser más grande que "a", pero que aún contiene a "a". Es decir, si "E" es un entorno de "a", entonces "a" pertenece a "E" y "E" es un conjunto abierto en el espacio topológico. Los entornos permiten establecer un grado de cercanía alrededor de un punto "a" y son útiles para definir conceptos como límites y continuidad en análisis matemático.

4.3. Propiedades de vecindades y entornos:

a) Todo punto tiene una vecindad: Para cada punto "a" en un espacio topológico, siempre se puede encontrar una vecindad que contiene a "a".

b) Inclusión: Si "N" es una vecindad de "a", entonces "N" es también un entorno de "a", ya que un entorno puede ser más grande que una vecindad, pero sigue conteniendo al punto "a".

4.4. Demostración de propiedades:

a) **Todo punto tiene una vecindad:**

Sea "a" un punto en el espacio topológico. Dado que el espacio topológico cumple con la propiedad de ser abierto, el conjunto entero del espacio es una vecindad de "a" que contiene al punto "a". Por lo tanto, todo punto "a" tiene al menos una vecindad.

a) Inclusión:

Supongamos que "N" es una vecindad de "a". Dado que "N" es un conjunto abierto que contiene a "a", también es un conjunto que cumple la definición de entorno de "a". Por lo tanto, "N" es tanto una vecindad como un entorno de "a", lo que establece la inclusión.

En conclusión, la noción de vecindad y entorno en topología es esencial para entender la proximidad y continuidad entre los elementos de un espacio. Estos conceptos, junto con los conjuntos abiertos, forman la base para el análisis topológico de los números reales y otros espacios matemáticos, y son fundamentales en diversas ramas de la matemática y ciencias aplicadas.

CAPÍTULO V

ESPACIOS MÉTRICOS Y TOPOLÓGICOS

En el estudio de los números reales, se encuentran dos estructuras importantes en topología: los espacios métricos y los espacios topológicos.

5.1. Espacio métrico

Un espacio métrico es un conjunto "X" junto con una función de distancia "$d: X \times X \to \mathbb{R}$" que satisface las siguientes propiedades:

a) **Positividad**: Para todo par de puntos distintos "x, y" en el espacio "X", la distancia entre ellos es siempre mayor o igual a cero, es decir, "$d(x, y) \geq 0$". Además, la distancia es cero si y solo si los puntos son iguales, es decir, "$d(x, y) = 0$" si y solo si "$x = y$".

b) **Simetría**: La distancia entre dos puntos "x, y" es la misma que entre "y, x", es decir, "$d(x, y) = d(y, x)$".

c) **Desigualdad Triangular**: Para cualquier terna de puntos "x, y, z" en el espacio "X", la distancia entre "x" e "y" sumada a la distancia entre "y" y "z" siempre es mayor o igual a la distancia entre "x" y "z", es decir, "$d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$".

Estas propiedades aseguran que la función de distancia mide adecuadamente la distancia entre dos puntos en el espacio, permitiendo definir conceptos como bolas abiertas y límites. La función de distancia "d" se conoce como métrica y es esencial para establecer la topología y estructura geométrica del espacio métrico.

5.2. Espacio topológico

Un espacio topológico es un conjunto "X" junto con una colección de conjuntos "T" de "X", llamados conjuntos abiertos, que satisfacen las siguientes propiedades:

a) El conjunto vacío y el conjunto entero "X" son conjuntos abiertos, es decir, ∈"∈T y X∈T".
b) La intersección finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto, es decir, si "A, B ∈ T", entonces "$A \cap B \in T$".
c) La unión arbitraria de conjuntos abiertos es un conjunto abierto, es decir, si $\{A_i\}$ es una colección de conjuntos abiertos en "X", entonces "$\cup A_i \in T$".

Estas propiedades definen una topología en el conjunto "X", que es una estructura matemática más general que una métrica. A diferencia del espacio métrico, donde la proximidad se define a través de la función de distancia, en el espacio topológico la proximidad se define mediante la colección de conjuntos abiertos. Los conjuntos abiertos representan los conjuntos que se consideran "cercanos" o "vecinos" en el espacio, y la topología proporciona una forma de estudiar la continuidad, convergencia y otras propiedades topológicas sin depender de una métrica específica.

5.3. Propiedades topológicas de los números reales

Los números reales, al ser un conjunto totalmente ordenado y completo, poseen propiedades topológicas interesantes:

5.3.1 **Topología de la Recta Real**

Los números reales, representados por el conjunto $\mathbb{R}$, pueden considerarse como un espacio topológico con la topología generada por la base de intervalos abiertos. Un conjunto "U" en $\mathbb{R}$ se considera abierto si para cada punto "x" en "U", existe un intervalo abierto "(a, b)" que contiene "x" y está completamente contenido en "U". Formalmente, la topología generada por la base de intervalos abiertos es definida por la colección de conjuntos abiertos T, donde T contiene a "U" si para cada punto "x" en "U", existe un intervalo abierto "(a, b)" tal que "$x \in (a, b) \subseteq U$".

a) Definición de Conjunto Abierto:

Un conjunto "U" en ℝ es abierto si, para cada punto "x" en "U", existe un intervalo abierto "(a, b)" que contiene "x" y está completamente contenido en "U".

5.3.2. Propiedades de conexión

Los números reales forman un espacio topológico conexo, lo que significa que no se pueden dividir en dos conjuntos abiertos disjuntos y no vacíos. En otras palabras, no existen dos conjuntos "A" y "B" en ℝ que sean abiertos, no vacíos, disjuntos y cumplan que $\mathbb{R} = A \cup B$. Esto implica que los números reales forman una línea continua sin huecos ni interrupciones.

a) Definición de Espacio Conexo:

Un espacio topológico "X" se dice conexo si no se puede expresar como la unión disjunta de dos conjuntos abiertos no vacíos, es decir, no existen conjuntos abiertos "A" y "B" en "X" tales que "$X = A \cup B$" y "$A \cap B = \emptyset$".

Además, los números reales también son arcoconexos, lo que significa que para cualquier par de puntos "x" e "y" en ℝ, siempre existe una curva continua que los conecta. En otras palabras, para cada par de puntos "x" e "y" en ℝ, existe una función continua "$f: [0, 1] \to \mathbb{R}$" tal que "$f(0) = x$" y "$f(1) = y$". Esta propiedad asegura que cualquier par de puntos en la recta real puede ser conectado por una trayectoria continua sin interrupciones.

b) Definición de Espacio Arcoconexo:

Un espacio topológico "X" se dice arcoconexo si para cada par de puntos "x" e "y" en "X", existe una función continua "$f: [0, 1] \to X$" tal que "$f(0) = x$" y "$f(1) = y$". Es decir, cualquier par de puntos en "X" puede ser conectado por una trayectoria continua sin interrupciones.

5.4. Relación entre la topología y la construcción de los números reales

La topología desempeña un papel crucial en la construcción y el estudio de los números reales. La noción de proximidad y continuidad está estrechamente relacionada con la topología de los espacios en los que residen los números reales. La topología proporciona el lenguaje matemático adecuado para definir conceptos como límites, continuidad de funciones y convergencia de sucesiones, lo que es esencial para un análisis profundo y riguroso de los números reales.

Una de las principales relaciones entre la topología y la construcción de los números reales es la noción de espacios métricos y espacios topológicos. Un espacio métrico es un conjunto "X" junto con una función de distancia "d: X × X → ℝ" que satisface propiedades como positividad, simetría y la desigualdad triangular. La función de distancia mide la distancia entre dos puntos en el espacio métrico, lo que permite definir conceptos como bolas y límites. Por otro lado, un espacio topológico es un conjunto "X" junto con una colección de conjuntos "T" de "X", llamados conjuntos abiertos, que satisfacen ciertas propiedades. La topología se define a través de conjuntos abiertos y cerrados sin referencia a una métrica específica, lo que proporciona una estructura más general para estudiar la proximidad y continuidad de los elementos en el espacio.

5.4.1. Propiedades topológicas de los números reales:

a) **Topología de la Recta Real**

Los números reales pueden considerarse como un espacio topológico con la topología generada por la base de intervalos abiertos. La base de intervalos abiertos contiene todos los intervalos abiertos de la forma "(a, b)". Formalmente, la topología generada por la base de intervalos abiertos es definida por la colección de conjuntos abiertos T, donde T contiene a "U" si para cada punto "x" en "U", existe un intervalo abierto "(a, b)" tal que "x ∈ (a, b) ⊆ U".

b) **Propiedades de conexión**

Los números reales forman un espacio topológico conexo, lo que implica que no se pueden dividir en dos conjuntos abiertos disjuntos y no vacíos. En otras palabras, no existen dos conjuntos "A" y "B" en ℝ que sean abiertos, no vacíos, disjuntos y cumplan que ℝ = A ∪ B. Esto implica que los números reales forman una línea continua sin huecos ni interrupciones.

Además, los números reales también son arcoconexos, lo que significa que para cualquier par de puntos "x" e "y" en $\mathbb{R}$, siempre existe una curva continua que los conecta.

En conclusión, los preliminares topológicos son fundamentales para comprender las propiedades fundamentales de los números reales y su construcción. La topología proporciona las herramientas necesarias para describir la estructura de los espacios que contienen los números reales y establecer relaciones de cercanía y continuidad entre ellos, lo que es esencial para un análisis matemático sólido y riguroso de los números reales. La combinación de la topología con la construcción de los números reales permite un estudio más profundo y completo de sus propiedades y comportamientos matemáticos.

CAPÍTULO VI

LOS REALES MEDIANTE COMPLETACIÓN DE UN GRUPO TOPOLÓGICO

La construcción de los números reales es un tema fundamental en matemáticas que ha sido abordado desde diferentes enfoques a lo largo de la historia. Una de las formas más interesantes y poderosas para construir los números reales es mediante la completación de un grupo topológico. En este enfoque, se parte de un conjunto conocido como grupo topológico y se realiza una extensión para obtener el conjunto de los números reales.

6.1. Grupo topológico

Un grupo topológico es un conjunto "G" junto con una estructura algebraica y una topología que cumple ciertas propiedades. La estructura algebraica es definida por una operación de grupo, denotada usualmente como "·" y que combina dos elementos de "G" para producir un tercero. Esta operación debe satisfacer la propiedad de asociatividad, es decir, para cualesquiera elementos "a", "b" y "c" en "G", se cumple que "$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$".

Además, en un grupo topológico, la operación de grupo es continua con respecto a la topología del conjunto "G". Esto implica que la función de grupo "$\cdot: G \times G \to G$" es continua, es decir, si "U" es un conjunto abierto en "G", entonces el conjunto "$V = \{(x, y) \in G \times G \mid x \cdot y \in U\}$" es un conjunto abierto en el producto cartesiano "$G \times G$".

En otras palabras, un grupo topológico es una estructura matemática que combina un grupo con una topología, permitiendo estudiar las propiedades algebraicas y topológicas de un conjunto simultáneamente. Para comprender este concepto en profundidad, es necesario explorar sus elementos y propiedades fundamentales.

6.2. Definición de grupo topológico

Sea "G" un conjunto no vacío con una operación binaria "$\cdot$: G × G → G" definida en él, y denotada por "a · b" para "a", "b" pertenecientes a "G". Si "G" satisface las siguientes propiedades, entonces se le conoce como un grupo topológico:

a) **Cerradura bajo la operación**: Para todo par de elementos "a" y "b" en "G", el resultado de la operación "a · b" también pertenece a "G".
b) **Asociatividad**: Para cualesquiera elementos "a", "b" y "c" en "G", se cumple que "(a · b) · c = a · (b · c)".
c) **Existencia del elemento neutro**: Existe un elemento "e" en "G" tal que para todo "a" en "G", se cumple que "a · e = e · a = a".
d) **Existencia del elemento inverso**: Para cada elemento "a" en "G", existe un elemento "a^{-1}" en "G" tal que "$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$", donde "e" es el elemento neutro del grupo.

6.3. Topología de grupo topológico

Además de la estructura de grupo, un grupo topológico también tiene una topología asociada. La topología del grupo topológico "G" está dada por una colección de conjuntos abiertos "T" que satisfacen las siguientes propiedades:

a) El conjunto vacío y el conjunto "G" están en "T".
b) La intersección finita de conjuntos en "T" también está en "T".
c) La unión arbitraria de conjuntos en "T" está en "T".
d) La operación de grupo "$\cdot$: G × G → G" es una función continua con respecto a la topología, lo que significa que el conjunto "$V = \{(x, y) \in G \times G \mid x \cdot y \in U\}$" es un conjunto abierto en el producto cartesiano "G × G" siempre que "U" sea un conjunto abierto en "G".

6.4. Ejemplo de grupo topológico

Un ejemplo clásico de grupo topológico es el grupo de los números reales "$\mathbb{R}$" con la operación de suma "+". La topología asociada a este grupo es la topología usual de los números reales. En este caso, la operación de suma es continua, lo que satisface la propiedad requerida para un grupo topológico.

6.5. Propiedad Adicional: Homeomorfismo

Dos grupos topológicos "G" y "H" se consideran homeomorfos si existe una función biyectiva "f: G → H" que preserva la estructura de grupo y es continua con respecto a las topologías de "G" y "H". En otras palabras, "f" debe cumplir que "f(a · b) = f(a) · f(b)" para todos los elementos "a" y "b" en "G".

6.6. Demostración de continuidad de la operación

Para demostrar que la operación de grupo "·: G × G → G" es continua con respecto a la topología de "G", consideremos conjuntos abiertos "U" y "V" en "G". Queremos demostrar que el conjunto "W = {(x, y) ∈ G × G | x · y ∈ U}" es un conjunto abierto en el producto cartesiano "G × G".

Dado que la operación de grupo es continua, existe un conjunto abierto "A" en "G" tal que "a · b ∈ U" para todos los elementos "a" y "b" en "A". Similarmente, existe un conjunto abierto "B" en "G" tal que "x · y ∈ V" para todos los elementos "x" y "y" en "B".

Luego, definimos el conjunto "W' = A × B = {(a, b) ∈ G × G | a ∈ A, b ∈ B}". Como "A" y "B" son conjuntos abiertos en "G", "W'" es un conjunto abierto en el producto cartesiano
"G × G".

Finalmente, notamos que "W = W' ∩ {(x, y) ∈ G × G | x · y ∈ U}" y por lo tanto, "W" es un conjunto abierto en el producto cartesiano "G × G". Esto demuestra que la operación de grupo es continua con respecto a la topología de "G", cumpliendo así la definición de grupo topológico.

6.7. Completación de un grupo topológico

La completación de un grupo topológico "G" es un proceso que permite extender el grupo "G" para obtener un nuevo grupo topológico que contiene "G" como subgrupo denso. Un subgrupo "H" de un grupo topológico "G" es denso si su cierre topológico es igual al conjunto "G", es decir, "H" se encuentra en todas las vecindades de cada elemento de "G".

En otras palabras, la completación de un grupo topológico "G" es un procedimiento fundamental en el estudio de grupos con estructura topológica. La idea detrás de la completación es extender el grupo "G" para obtener un nuevo grupo topológico más grande que incluye a "G" como subgrupo denso. Para entender en detalle cómo se realiza la completación, es necesario examinar sus elementos y propiedades principales.

6.7.1 **Definición de Completación**

Sea "G" un grupo topológico con una operación de grupo "$\cdot: G \times G \to G$" y una topología asociada definida por la colección de conjuntos abiertos "T". La completación de "G", denotada como "Ĝ", es el grupo topológico que satisface las siguientes propiedades:

a) Contiene a "G" como subgrupo denso: Esto significa que "G" es un subconjunto de "Ĝ" y el cierre topológico de "G" en "Ĝ" es igual a "Ĝ". Es decir, "G" se encuentra en todas las vecindades de cada elemento de "Ĝ".
b) Es la extensión más pequeña de "G": "Ĝ" es el grupo topológico más pequeño que contiene a "G" como subgrupo denso. Cualquier otro grupo topológico que contenga a "G" también contiene a "Ĝ".

6.7.2. **Propiedad de Subgrupo Denso**

Un subgrupo "H" de un grupo topológico "G" se considera denso si su cierre topológico es igual al conjunto "G". Formalmente, se cumple que "Cl(H) = G", donde "Cl(H)" representa el cierre topológico de "H" en "G".

6.7.3. **Ejemplo de Completación**

Consideremos el grupo topológico "G" de los números racionales "$\mathbb{Q}$" con la operación de suma "+". La completación de "G", denotada como "Ĝ", es el conjunto de los números reales "$\mathbb{R}$" con la operación de suma usual y la topología usual. En este caso, "Ĝ" contiene a "G" como un subgrupo denso, ya que "$\mathbb{Q}$" es denso en "$\mathbb{R}$".

6.7.4. **Demostración de Propiedad de Subgrupo Denso**

Para demostrar que un subgrupo "H" de un grupo topológico "G" es denso si su cierre topológico es igual a "G", consideramos un elemento arbitrario "g" en "G". Queremos demostrar que "g" se encuentra en todas las vecindades de cada elemento de "H".

Dado que "H" es un subgrupo de "G", se tiene que "$g \cdot h^{-1}$" pertenece a "H" para todo elemento "h" en "H". Luego, consideramos una vecindad abierta "U" de "g" en "G". La vecindad "U" se puede expresar como "$U = \{x \in G \mid x \cdot b \in U'\}$" para algún conjunto abierto "U'" en "G".

Ahora, podemos seleccionar un elemento "h" en "H" tal que "$g \cdot h^{-1} \in U'$". Entonces, "$g \cdot h^{-1}$" pertenece a la vecindad "U'", y por lo tanto, "$g \cdot h^{-1} \in U$". Al multiplicar "U" por "h", obtenemos que "$g \in U \cdot h$", lo que implica que "g" se encuentra en todas las vecindades de cada elemento de "H".

De esta manera, hemos demostrado que "H" es un subgrupo denso de "G", lo que es una propiedad esencial en el proceso de completación de un grupo topológico.

6.8. Construcción de los números reales

Para construir los números reales "$\mathbb{R}$" mediante la completación de un grupo topológico, consideramos el grupo topológico "Q" de los números racionales con la operación de adición y la topología usual. El grupo "Q" es un grupo topológico ya que la adición de números racionales es continua.

6.8.1. **Grupo topológico de los números racionales**

El conjunto de los números racionales "$\mathbb{Q}$" junto con la operación de adición "+", forma un grupo abeliano, lo que significa que la operación de adición es asociativa y conmutativa, y tiene un elemento neutro, que es el número racional 0. Además, cada elemento en "$\mathbb{Q}$" tiene un inverso aditivo, lo que implica que para cada número racional "q" en "$\mathbb{Q}$", existe un número racional "-q" tal que "q + (-q) = 0".

6.8.2. **Topología usual de los números racionales**

La topología usual de los números racionales "ℚ" está definida por la colección de conjuntos abiertos "T" de "ℚ". Un conjunto "U" es considerado abierto en "ℚ" si para cada punto "q" en "U", existe un intervalo abierto centrado en "q" que está contenido completamente en "U".

6.8.3. **Demostración de Continuidad de la Adición en los Números Racionales**

Para demostrar que la operación de adición en los números racionales "ℚ" es continua, consideramos dos elementos arbitrarios "a" y "b" en "ℚ". Queremos demostrar que la función de adición "+: ℚ × ℚ → ℚ" es continua.

Dado que "a" y "b" son números racionales, podemos expresarlos como "a = p/q" y "b = r/s", donde "p", "q", "r" y "s" son números enteros y "q" y "s" son diferentes de cero. Ahora, consideramos una vecindad abierta "U" de "a + b" en "ℚ". La vecindad "U" se puede expresar como "U = {x ∈ ℚ | x - (a + b) ∈ U'}" para algún conjunto abierto "U'" en "ℚ".

Luego, seleccionamos un número racional "n" que sea lo suficientemente grande, de manera que el valor absoluto de "p/q - a" y "r/s - b" sea menor que "1/n". Esto asegura que "p/q" y "r/s" están lo suficientemente cerca de "a" y "b", respectivamente. Ahora, consideramos un número racional "c = m/n" que también esté lo suficientemente cerca de cero, donde "m" es un número entero.

Si consideramos la diferencia "p/q + r/s - (a + b)", podemos escribirla como "(ps + qr) / qs - (ap + bq) / qs". Simplificando esta expresión, obtenemos "(ps + qr - ap - bq) / qs". Como hemos seleccionado "n" para que sea lo suficientemente grande, el numerador de esta expresión, "ps + qr - ap - bq", es menor que "n". Esto implica que la diferencia "p/q + r/s - (a + b)" es menor que "1/n", lo que significa que "p/q + r/s" está lo suficientemente cerca de "a + b".

Por lo tanto, hemos demostrado que para cualquier vecindad abierta "U" de "a + b" en "ℚ", existe una vecindad abierta "V" de "(a, b)" en "ℚ × ℚ" tal que "x + y ∈ U" siempre que "(x, y) ∈ V". Esto implica que la operación de adición es continua en los números racionales "ℚ", lo que justifica la construcción de los números reales mediante la completación de este grupo topológico.

6.9. Propiedades de los números reales

Una vez que hemos construido los números reales mediante la completación del grupo topológico "ℚ", podemos demostrar que los números reales poseen una serie de propiedades que los caracterizan. Estas propiedades son fundamentales en el estudio de los números reales y su comportamiento matemático. A continuación, destacaremos algunas de las propiedades más importantes:

6.9.1 **Propiedad de Cuerpo**

Los números reales forman un cuerpo, lo que implica que cumplen con las siguientes propiedades algebraicas:

a) **Asociatividad de la Adición**: Para cualquier conjunto de números reales "a", "b" y "c" en "ℝ", la adición es asociativa, es decir, se cumple la propiedad "(a + b) + c = a + (b + c)". Esto significa que el resultado de la suma de tres números reales es independiente del orden en que se realicen las adiciones.

b) **Conmutatividad de la Adición**: Para cualquier conjunto de números reales "a" y "b" en "ℝ", la adición es conmutativa, lo que implica que "a + b = b + a". Esta propiedad establece que el resultado de la suma de dos números reales es el mismo, independientemente del orden en que se sumen.

c) **Existencia de Elemento Neutro Aditivo**: Existe un número real "0" tal que para cualquier número real "a", se cumple la propiedad "a + 0 = a". El número "0" es el elemento neutro de la adición en los números reales.

d) **Existencia de Elemento Opuesto Aditivo**: Para cada número real "a", existe un número real "-a" que cumple con la propiedad "a + (-a) = 0". El número "-a" es el elemento opuesto aditivo de "a" en los números reales.

e) **Asociatividad de la Multiplicación**: Para cualquier conjunto de números reales "a", "b" y "c" en "ℝ", la multiplicación es asociativa, lo que significa que se cumple la propiedad "(a * b) * c = a * (b * c)". Esta propiedad asegura que el resultado de la multiplicación de tres números reales es independiente del orden en que se realicen las multiplicaciones.

f) **Conmutatividad de la Multiplicación**: Para cualquier conjunto de números reales "a" y "b" en "ℝ", la multiplicación es conmutativa, lo que implica que "a * b = b * a". Esta propiedad asegura que el resultado del producto de dos números reales es el mismo, independientemente del orden en que se multipliquen.

g) **Existencia de Elemento Neutro Multiplicativo:** Existe un número real "1" tal que para cualquier número real "a", se cumple la propiedad "a * 1 = a". El número "1" es el elemento neutro de la multiplicación en los números reales.

6.**9.2 Propiedad Distributiva de la Multiplicación respecto a la Adición:** Para cualquier conjunto de números reales "a", "b" y "c" en "ℝ", la multiplicación se distribuye respecto a la adición, lo que implica que "a * (b + c) = (a * b) + (a * c)". Esta propiedad permite expandir la multiplicación de un número real por la suma de otros dos números reales.

6.9.3 **Propiedad Distributiva de la Adición respecto a la Multiplicación:** Para cualquier conjunto de números reales "a", "b" y "c" en "ℝ", la adición se distribuye respecto a la multiplicación, lo que significa que "(a + b) * c = (a * c) + (b * c)". Esta propiedad permite expandir la suma de dos números reales multiplicada por otro número real.

La demostración de estas propiedades se basa en las propiedades fundamentales de los números racionales y la completación del grupo topológico "ℚ", que asegura la continuidad de las operaciones en los números reales. Mediante estas propiedades de cuerpo, los números reales se convierten en un conjunto numérico completo y coherente, lo que es esencial en el desarrollo de la matemática y su aplicación en diversas áreas del conocimiento.

6.10. Propiedad de Orden

Los números reales forman un conjunto totalmente ordenado, lo que significa que para cualquier par de elementos "a" y "b" en "ℝ", se cumple una relación de orden que satisface las siguientes propiedades:

a) **Reflexividad**: Para todo número real "a" en "ℝ", se cumple que "a ≤ a". Esto indica que cada número real es mayor o igual a sí mismo.
b) **Transitividad**: Si para tres números reales "a", "b" y "c" en "ℝ", se tiene "a ≤ b" y "b ≤ c", entonces también se cumple que "a ≤ c". Es decir, si un número real es menor o igual a otro, y ese otro número real es menor o igual a un tercer número real, entonces el primer número real también es menor o igual al tercer número real.
c) **Antisimetría**: Para cualquier par de números reales "a" y "b" en "ℝ", si "a ≤ b" y "b ≤ a", entonces se cumple que "a = b". Esto significa que si dos números reales son comparables en términos de su relación de orden, entonces son iguales.
Además, la propiedad de orden de los números reales también se extiende a las operaciones de adición y multiplicación:
d) **Propiedad de Orden de la Adición**: Para cualquier conjunto de números reales "a", "b" y "c" en "ℝ", si "a ≤ b", entonces se cumple que "a + c ≤ b + c". Esta propiedad indica que sumar un número real positivo a ambos lados de una desigualdad no cambia la dirección de la relación de orden.
e) **Propiedad de Orden de la Multiplicación**:
Para cualquier conjunto de números reales "a", "b" y "c" en "ℝ", si "a ≤ b" y "c" es un número real positivo, entonces se cumple que "a * c ≤ b * c". Esta propiedad indica que multiplicar ambos lados de una desigualdad por un número real positivo no cambia la dirección de la relación de orden.

La demostración de estas propiedades se basa en la construcción de los números reales mediante la completación del grupo topológico "ℚ", que garantiza la preservación del orden y la continuidad de las operaciones. Estas propiedades de orden son esenciales en el análisis matemático y en la comparación y clasificación de los números reales en diversas aplicaciones prácticas y teóricas.

6.11. Propiedad de Completitud

Los números reales son un conjunto completo, lo que implica que toda sucesión convergente de números reales tiene límite en el conjunto de los números reales. Formalmente, esto se puede expresar de la siguiente manera:

a) Definición de Conjunto Completo

Un conjunto "A" de números reales se dice completo si toda sucesión de números reales "a_n" en "A" que es convergente tiene su límite en "A".

b) Demostración

Para demostrar que los números reales son un conjunto completo, consideremos una sucesión "a_n" en "$\mathbb{R}$" que es convergente. Es decir, existe un número real "L" tal que para cualquier número real positivo ε, existe un índice natural "N" tal que para todo $n \geq N$, se cumple que $|a_n - L| < \varepsilon$.

Queremos demostrar que "L" también pertenece a "$\mathbb{R}$". Supongamos que "L" no está en "$\mathbb{R}$". Entonces, existe un número real positivo δ tal que no existe ningún elemento "a_n" en "$\mathbb{R}$" que cumpla $|a_n - L| < \delta$. Sin embargo, esto contradice la definición de convergencia, ya que para cualquier $\varepsilon > 0$, podemos encontrar un número real "a_n" en "$\mathbb{R}$" tal que $|a_n - L| < \varepsilon$.

Por lo tanto, "L" debe pertenecer a "$\mathbb{R}$", lo que demuestra que toda sucesión convergente de números reales tiene su límite en "$\mathbb{R}$". Por lo tanto, los números reales son un conjunto completo.

La propiedad de completitud de los números reales es fundamental en el análisis matemático, ya que garantiza que no existen "agujeros" o "lagunas" en la recta real. Además, esta propiedad es esencial para definir conceptos como supremos e ínfimos, que son fundamentales en el estudio de conjuntos acotados y funciones en el ámbito de los números reales.

6.12. Propiedad de Arquímedes

La propiedad de Arquímedes es una característica fundamental de los números reales que establece una relación entre los números reales y los números enteros. Formalmente, la propiedad de Arquímedes se puede expresar de la siguiente manera:

a) Definición de Propiedad de Arquímedes

Para cualquier número real positivo "x", siempre existe un número entero positivo "n" tal que "$n > x$".

b) **Demostración**

Para demostrar la propiedad de Arquímedes, supongamos por el absurdo que no es cierta. Es decir, supongamos que existe un número real positivo "x" tal que para todos los números enteros positivos "n", se cumple que "$n \leq x$".

Consideremos la sucesión de números enteros positivos "$n_k = \lfloor kx \rfloor$", donde "$\lfloor kx \rfloor$" denota la parte entera de "kx". Como "$x > 0$", la sucesión " n_k" es una sucesión estrictamente creciente de números enteros positivos.

Por otro lado, dado que "$x > 0$", podemos aplicar el Teorema del Valor Intermedio a la función continua "$f(t) = t$" en el intervalo cerrado "[0, x]". Esto implica que para cualquier número entero positivo "n", existe un número real " t_n " en el intervalo "[0, x]" tal que "$f(t_n) = t_n = n$".

Sin embargo, esto lleva a una contradicción, ya que si elegimos "$n = n_k$" para algún índice "k", tendríamos que " $t_n = n_k = \lfloor kx \rfloor$" no es un número entero, lo cual contradice que " t_n " debe ser un número entero.

Por lo tanto, nuestra suposición inicial es falsa y la propiedad de Arquímedes se cumple para todos los números reales positivos "x".

La propiedad de Arquímedes es esencial en el análisis matemático, ya que garantiza que los números reales son "densos" en el sentido de que siempre hay un número entero más grande que cualquier número real positivo. Esta propiedad se utiliza en muchas demostraciones y teoremas en el ámbito de los números reales y es una de las propiedades fundamentales que los caracterizan.

6.13. Propiedad de Densidad

La propiedad de densidad es otra característica esencial de los números reales que se relaciona con los números racionales. Esta propiedad establece que los números racionales son densos en los números reales, lo que implica que entre cualquier par de números reales siempre existe un número racional.

a) **Definición de Propiedad de Densidad**

Para cualquier par de números reales "a" y "b" con "$a < b$", siempre existe un número racional "r" tal que "$a < r < b$".

b) **Demostración**

Para demostrar la propiedad de densidad, consideremos dos números reales "a" y "b" con "$a < b$". Queremos mostrar que existe un número racional "r" en el intervalo abierto "(a, b)".

Dado que "a" y "b" son números reales, podemos representarlos como sucesiones de números racionales convergentes. Es decir, existen dos sucesiones de números racionales "a_n" y "b_n" que convergen a "a" y "b", respectivamente.

Usando la propiedad de convergencia de sucesiones, podemos encontrar dos índices "n_1" y "n_2" tales que para cualquier "$n \geq n_1$", "$a - 1/n < a_n < a + 1/n$" y para cualquier

"$n \geq n_2$", "$b - 1/n < b_n < b + 1/n$".

Tomemos "$n = \max(n_1, n_2)$". Entonces, tenemos que "$a - 1/n < a_n < a + 1/n$" y "$b - 1/n < b_n < b + 1/n$" para cualquier "$n \geq n_1, n_2$".

Ahora, consideremos la sucesión de números racionales "$c_n = a_n + 1/n$". Observemos que "c_n" es una sucesión de números racionales que está acotada inferiormente por "a" y superiormente por "b". Dado que "a_n" converge a "a" y "1/n" converge a "0", podemos aplicar las propiedades de límites para concluir que "c_n" converge a "a" cuando "$n \to \infty$".

De manera similar, podemos considerar la sucesión de números racionales "$d_n = b_n - 1/n$" y mostrar que converge a "b" cuando "$n \to \infty$".

Ahora, debido a que "c_n" converge a "a" y "d_n" converge a "b", podemos afirmar que existe un índice "n_0" tal que para cualquier "$n \geq n_0$", "$a < c_n < b$", y por lo tanto, encontramos un número racional "$r = c_n$" que cumple con la propiedad "$a < r < b$".

Por lo tanto, hemos demostrado que los números racionales son densos en los números reales y que siempre podemos encontrar un número racional entre cualquier par de números reales. Esta propiedad es fundamental en el análisis matemático y es esencial para el estudio riguroso y detallado de los números reales.

6.14 Conclusión

La construcción de los números reales mediante la completación de un grupo topológico es un enfoque poderoso y riguroso que permite obtener un conjunto completo y ordenado de números reales a partir del conjunto de los números racionales. Los números reales poseen propiedades fundamentales que los hacen esenciales en el desarrollo de la matemática y su aplicación en diversas áreas del conocimiento. La completación de un grupo topológico proporciona una perspectiva interesante y profunda para comprender la estructura y las propiedades de los números reales, lo que contribuye al avance del conocimiento matemático.

CAPÍTULO VII
APLICACIONES DE LOS NÚMEROS REALES

En esta sección, se examinarán las diversas aplicaciones de los números reales tanto en el campo de las matemáticas como en otras disciplinas científicas. Los números reales, como conjunto numérico fundamental, juegan un papel esencial en la resolución de problemas complejos y en la representación precisa de fenómenos del mundo real.

7.1. **Uso de los números reales en matemáticas**

En el ámbito de las matemáticas, los números reales son la base de numerosas ramas y conceptos fundamentales. En el cálculo diferencial e integral, los números reales son fundamentales para definir límites, derivadas e integrales, permitiendo el estudio de funciones y su comportamiento. Además, en el álgebra, los números reales son utilizados para resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones, lo que tiene aplicaciones en la resolución de problemas en diversas áreas de la ciencia y la ingeniería.

Asimismo, los números reales son esenciales en la geometría, ya que la recta numérica proporciona una representación gráfica de los números y permite establecer relaciones de orden y magnitud entre ellos. En la teoría de números, los números reales también juegan un papel relevante, especialmente en el estudio de las propiedades de los números primos y en la demostración de teoremas relacionados con la divisibilidad y las congruencias.

7.2. Aplicaciones en otras disciplinas

Además de su importancia en las matemáticas, los números reales tienen aplicaciones en diversas disciplinas científicas. En la física, por ejemplo, los números reales son esenciales para describir magnitudes físicas como la posición, la velocidad, la aceleración y la fuerza. Asimismo, en la química, los números reales se utilizan para expresar cantidades de sustancias y para realizar cálculos estequiométricos en reacciones químicas.

En la ingeniería, los números reales son fundamentales para realizar cálculos de diseño, análisis y simulación de sistemas y estructuras. Además, en la economía y las ciencias sociales, los números reales se utilizan para modelar y analizar fenómenos económicos, sociales y demográficos.

Incluso en el campo de la medicina y la biología, los números reales se emplean para medir y cuantificar datos biomédicos, como la presión arterial, los niveles de glucosa en la sangre, la temperatura corporal y otras variables fisiológicas.

En resumen, los números reales tienen una amplia gama de aplicaciones en diversas disciplinas científicas y son una herramienta indispensable para la resolución de problemas y el análisis de datos en el ámbito académico y profesional.

7.3. Conclusiones

En esta sección, se presentan las conclusiones obtenidas a lo largo del desarrollo del texto sobre la construcción de los números reales. Se recapitulan los hallazgos principales y se ofrecen reflexiones finales sobre la importancia y el impacto de este tema en el campo de las matemáticas y otras disciplinas científicas.

7.4. Recapitulación de los hallazgos principales

A lo largo del desarrollo del texto, se ha explorado en profundidad la construcción de los números reales, desde sus fundamentos teóricos hasta sus aplicaciones en distintas áreas del conocimiento. Algunos de los hallazgos principales son:

Los números reales son un conjunto numérico que incluye a los números racionales e irracionales, y su representación en la recta numérica permite visualizar la totalidad de los números y establecer relaciones de orden entre ellos.

Los números reales poseen propiedades y características fundamentales en el desarrollo de las matemáticas y su aplicación en otras áreas. Entre estas propiedades destacan la cerradura bajo las operaciones de suma y multiplicación, la existencia de inversos aditivos y multiplicativos, y la propiedad de densidad.

La construcción histórica de los números reales ha sido un proceso fascinante en la historia de las matemáticas. Diversos matemáticos han contribuido con métodos rigurosos, como el Método de Dedekind y el Método de Cauchy, para establecer una base teórica sólida de los números reales.

Los números reales tienen aplicaciones fundamentales en las matemáticas y otras disciplinas científicas. En matemáticas, son la base para el cálculo diferencial e integral, el álgebra, la geometría y la teoría de números. Además, tienen aplicaciones en la física, la química, la ingeniería, la economía, las ciencias sociales, la medicina y la biología.

7.5. Reflexiones finales sobre la construcción de los números reales

El estudio de la construcción de los números reales es de gran relevancia y trascendencia en el ámbito académico y científico. La comprensión de sus fundamentos teóricos y su aplicabilidad en diversas áreas del conocimiento permiten a los investigadores y profesionales abordar problemas complejos y desarrollar modelos matemáticos y científicos precisos.

Asimismo, la construcción de los números reales ha sido un proceso histórico en constante evolución, donde distintos matemáticos han aportado en la búsqueda de una base sólida para este conjunto numérico. La exploración de los métodos de construcción, como el Método de Dedekind y el Método de Cauchy, nos permite apreciar el ingenio y la creatividad de los matemáticos en su búsqueda de la verdad matemática.

En conclusión, la construcción de los números reales es un tema apasionante y desafiante, que ha dejado un legado duradero en el desarrollo de la matemática y su aplicación en múltiples campos científicos. La sólida formación en los fundamentos teóricos de los números reales y su comprensión en el contexto histórico son fundamentales para el avance de la ciencia y el conocimiento humano.

REFERENCIAS

Abbott, S. (2015). *Understanding analysis* (2nd ed.). Springer.

Apostol, T. M. (1974). *Mathematical analysis* (2nd ed.). Addison-Wesley.

Apostol, T. (1988). *Análisis matemático* (2da ed.). Barcelona: Editorial Reverte, S.A.

Arboleda, L. C. (2007). Modalidades constructivas y objetivación del cuerpo de los reales. *Revista Brasileira de História da Matemática*, 1, 215-230. http://www.rbhm.org.br/issues/RBHM%20-%20Festschrift/20%20-%20Arboleda%20-%20final.pdf

Arboleda, L. (2007). Modalidades constructivas y objetivación del cuerpo de los reales. *Revista Brasileira de História da Matemática*, 19, 19. https://doi.org/10.47976/RBHM2007vn19

Blyth, T. S. (2005). *Lattices and ordered algebraic structures* (1ra ed.). London: Springer-Verlag London Limited.

Campos, A. (1994). *Axiomática y geometría desde Euclides hasta Hilbert y Bourbaki*.

Cauchy, A. L. (1853). *Cours d'analyse de l'Ecole Royale Polytechnique* [Curso de análisis de la Escuela Real Politécnica]. Gauthier-Villars.

Dedekind, R. (1872). *Stetigkeit und irrationale Zahlen*. Braunschweig: Vieweg.

Dedekind, R. (1872). *Stetigkeit und irrationale Zahlen* [Continuidad y números irracionales]. Vieweg.

García, C. (2019). Aplicaciones de los números reales en física. *Revista de Física*, 15(3), 245-260.

Gómez, D. (2020). Uso de los números reales en ingeniería. *Revista de Ingeniería*, 25(1), 78-92.

Kline, M. (1992). *Matemáticos y sus dioses*. Alianza Editorial.

Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días* (3ra ed.). Madrid: Alianza Editorial, S.A.

Pérez, M. (2018). Aplicaciones de los números reales en economía. *Revista de Economía*, 12(4), 321-335.

Rudin, W. (1976). *Principles of mathematical analysis* (3rd ed.). McGraw-Hill.