



<https://fondoeditorial.une.edu.pe>

FUNDAMENTOS DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA: TEORÍAS DIDÁCTICAS

DANIEL MARCOS CHIRINOS MALDONADO
FLORENCIO FLORES CCANTO
LOURDES GALVEZ MORALES



Fondo Editorial UNE



Fondo Editorial UNE



Fondo Editorial UNE

Fundamentos de Didáctica de la Matemática: Teorías Didácticas



Daniel Marcos Chirinos Maldonado
Florencio Flores Ccanto
Lourdes Galvez Morales

Lima, Perú - 2022

Fundamentos de Didáctica de la Matemática: Teorías Didácticas

© **Daniel Marcos Chirinos Maldonado**

Dirección: Avenida San José 278 Distrito: Villa María de Triunfo, Lima -Perú
dchirinos@une.edu.pe

Florencio Flores Ccanto

Dirección: Cooperativa de V. Pablo Patrón Mz: Ñ, Lote: 13 Lurigancha, Lima -Perú
fflores@une.edu.pe

Lourdes Galvez Morales

Dirección: MZ: J3 LT: 9 5TA Zona Yanacoto, Chosica, Lima -Perú
lgalvez@une.edu.pe

Editada por:

© **Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle (UNE) - Fondo Editorial “La Cantuta”**

Dirección: Enrique Guzman y Valle N° 951, Lurigancha-Chosica 15472, Perú

ISNI: 0000 0000 8534 4267

fondoeditorial@une.edu.pe

Teléf. móvil: +51 999 140 920

Portal Web: <https://www.une.edu.pe/>

Primera edición digital: Diciembre de 2022

Libro digital disponible en: <https://fondoeditorial.une.edu.pe/>

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú N° 2022-12851

ISBN: 978-612-4148-23-1

DOI: <https://doi.org/10.54942/lacantuta.6>

Corrección de estilo: Luis Pablo Díaz Tito

luisp.diaz@upsjb.edu.pe / Tel. de contacto: +51 998 311 399

Diseño y Diagramación: Gráfica “imagen”

Manuel Enrique Sampen Antonio

sampen25@gmail.com / Tel. de contacto: +51 990 064 589

Revisión por pares ciegos aprobado por el:

Consejo Editorial del Fondo Editorial “La Cantuta”

<https://fondoeditorial.une.edu.pe/index.php/lacantuta/about/editorialTeam>

Libro resultado de Investigación y con revisión por pares doble ciego.

Sello editorial: 978-612-4148

Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, su tratamiento información, la transmisión de ninguna otra forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, por fotocopia, por registro u otros métodos, sin el permiso previo y por escrito de los titulares del copyright.

INTRODUCCIÓN

A través del presente texto pretendemos motivar el “estudio”, así como dar a conocer a los formadores de docentes, docentes en ejercicio y estudiantes de matemática, los fundamentos de Didáctica de la matemática, concebida como una disciplina científica. Asimismo, contribuir en las tareas de planificación, estrategias y evaluación de los estudiantes, de acuerdo con la actualización constante de la ciencia y la didáctica, que sugieren nuevas iniciativas e invitan a los profesionales a la investigación y a la renovación permanente.

En la educación básica, la responsabilidad del estudiante de aprender matemática es la consecuencia de la enseñanza del profesor; por ello es importante conocer los fundamentos de la didáctica de la Matemática y las teorías didácticas

En la actualidad los trabajos de algunos maestros franceses como Guy Brousseau, Yves Chevallard, Gerard Vergnaud, Michelle Artigue, Raimond Duval y otros, han permitido desarrollar una red organizada de conocimientos teóricos interpretativos sobre la didáctica de la matemática.

Por ello, hay un desafío importante para nosotros los docentes de matemática: Concretar, tantos congresos y reuniones latinoamericanas de Educación Matemática y Didáctica de la Matemática, con el diseño y puesta a prueba de conocimientos contextualizados en nuestra realidad y que organizados con exigencia permitan describir y explicar los fenómenos del aprendizaje de la matemática en los jóvenes estudiantes de nuestro país.

Esperamos que esta obra, pueda promover en los docentes espacios de reflexión sobre el trabajo en el aula y realizar una lectura crítica sobre la propia práctica que implica no solo saber qué y cómo se enseña, sino qué aprenden nuestros estudiantes.

Los autores.

Tabla de Contenido

I Unidad: Didáctica clásica y Didáctica de la matemática.

1.1.	Conceptos. Campos de estudios de la didáctica	8
1.2.	La didáctica de la matemática	16
1.3.	La didáctica de la matemática como disciplina científica	21
1.4.	La didáctica clásica. Límites del punto de vista clásico en didáctica.....	28
1.5.	Fuentes de la investigación de la didáctica	32
1.6.	Fenómenos didácticos.....	35

II Unidad: Teorías didácticas.

2.1.	Teoría de campos conceptuales	54
2.1.1.	Taller de campos conceptuales	70
2.2.	La teoría de situaciones didácticas.....	77
2.2.1.	Ejemplo de una situación A - didáctica: La carrera a 20”	84
2.2.2.	Ejemplo de una situación didáctica:.....	88
2.3.	Teoría de Errores y Obstáculos	89
2.3.1.	El error en el aprendizaje de la matemática, como una estrategia del constructivismo.....	89
2.3.2.	Características y tipos de obstáculos	94
2.3.3	Taller: “Errores y obstáculos”.....	103

Referencias Bibliográficas.....	105
---------------------------------	-----



“Siempre es más fácil hacerlo de la forma más difícil”..., y

Corolario de Dieudonné

“Sobre todo en la enseñanza de la matemática”.

1.1. Conceptos. Campos de estudios de la didáctica

Reflexionemos sobre el objeto de estudio de la Didáctica de la matemática:

¿Qué es la didáctica de la matemática?

¿Por qué decimos didáctica experimental?

Comenius (Jan Amos Komensky), en 1640 introdujo como sustantivo la palabra didáctica en su obra Didáctica magna. Pretendía con ello designar el arte de enseñar, aunque usualmente didáctica es un adjetivo calificativo.

Por otro lado, se habla de material didáctico, medios didácticos o que un profesor es muy didáctico, etc., y como esta palabra está en boga, algunos pretenden utilizarla como sinónimo de pedagogía.

¿Cómo utiliza usted el término Didáctica?

¿Cómo sustantivo o adjetivo calificativo?

El Pequeño Larousse ilustrado (1980) da la definición siguiente de Didáctica: “Ciencia que tiene por objeto los métodos de enseñanza”. Esta definición tiene una connotación normativa. Un académico que prepara a los profesores para el sistema educacional en la cátedra de Didáctica pretenderá enseñar los “mejores métodos” de enseñanza, según las innovaciones del momento y de acuerdo a las circulares ministeriales, lo que le da también a esta definición una connotación institucional.

Otra definición es la de Griesel: “La Didáctica de la matemática es la ciencia del desarrollo de planificaciones realizables en la enseñanza de la matemática. Ella estudia la puesta en práctica y las evaluaciones de estas planificaciones. Así como también los objetivos y las decisiones sobre las materias a enseñar”. Esta definición da demasiada importancia a los programas escolares institucionalizados, y por otra parte, se preocupa por desarrollar el currículo: fabricando secuencias de enseñanza, series de manuales escolares, etc. Ahora bien, los programas son transitorios y varían de un país a otro, la elección de las materias que se hacen puede tener o no influencia temporal sobre los

conocimientos, pero el impacto en la comprensión global de lo que es el pensamiento matemático puede no ser suficiente.

La definición de Griesel busca la receta de la clase milagrosa que se apoya en la eficacia inmediata del discurso correcto. Esta concepción muestra una Didáctica de cámara (institutos de investigación pedagógica no asociados a aulas escolares).

¿Es la Didáctica una ciencia?

¿Cuál es el mejor método de enseñanza que usted utiliza?



CONCEPCIONES ACERCA DE LA DIDÁCTICA:



Otras definiciones de la Didáctica de la matemática son las que aparecen en *Didáctica de la matemática*, de Emma Castelnuovo y *Didáctica matemática heurística*, de Pedro Puig, donde estos maestros innovadores exponen sus artes de enseñar que han encantado a quienes los han visto trabajar.

Es decir, nos preguntamos:

¿Por qué la Dra. Castelnuovo, cuando enseña polígonos con el material didáctico “Los Mecanos”, tiene un gran éxito con sus estudiantes, pero cuando Florencio enseña en su pueblo natal Pacaraos-Huaral, el mismo tema de geometría con el mismo material “mecanos” y siguiendo las indicaciones de la Dra. Castelnuovo, ¿sus alumnos no aprenden polígonos?

Por su parte, el Dr. Guy Brousseau estudia tres interpretaciones de la palabra didáctica: La primera, la considera como sinónimo de enseñanza. En este sentido sería un proyecto social cuyo objetivo es hacer adquirir a un sujeto un saber. En esta interpretación es fundamental el rol del saber. La segunda, la concibe como el conjunto de medios que sirven para enseñar. Esta interpretación responde al sentido del adjetivo y explicita programas, objetivos, medios de evaluación, materiales, manuales, softwares educativos, etc., además de estar muy cerca a la Pedagogía especial y a la metodología. Ambas concepciones consideran la didáctica como un conjunto de datos normativos, prescriptivos y organizados para la decisión y la acción. La tercera interpretación es opuesta a las anteriores y concibe a la didáctica como el conocimiento del arte de

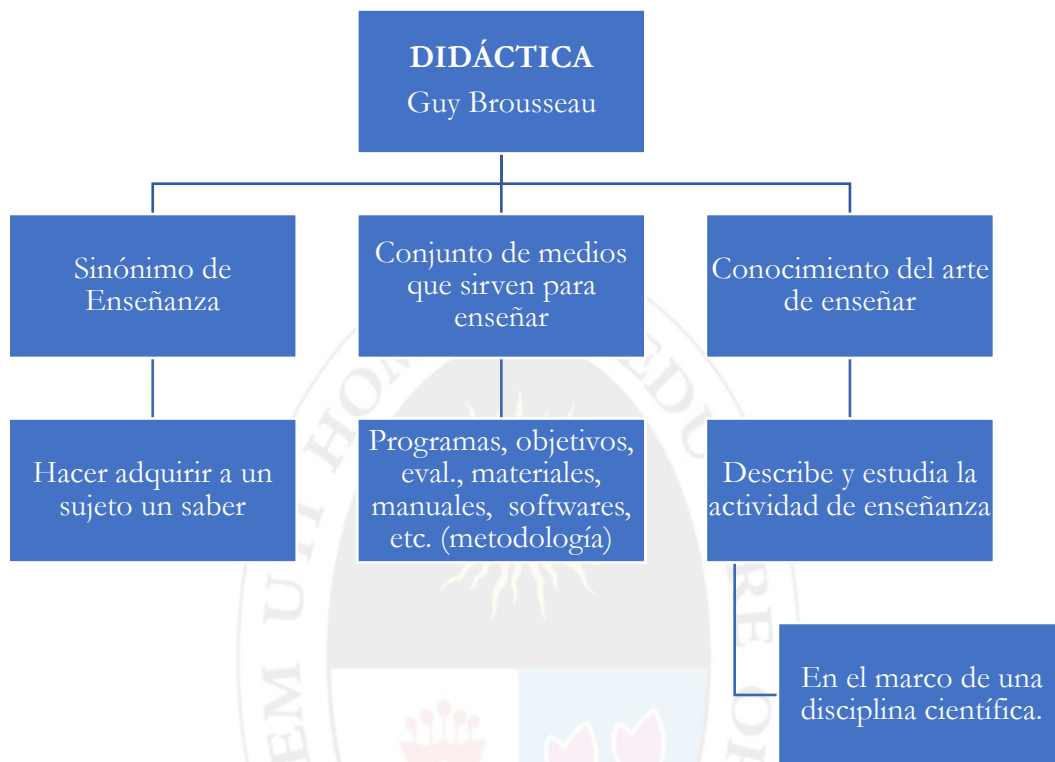
enseñar. Ella describe y estudia la actividad de enseñanza en el marco de una disciplina científica.

Las tres interpretaciones son complementarias, puesto que abarcan las innovaciones, las técnicas y el conocimiento sobre la enseñanza.

Recordemos que por los años ochenta se intentó concebir la didáctica como **una ciencia que se preocupa de la comunicación de conocimientos y de sus transformaciones**. Desde una epistemología experimental que intentó teorizar sobre la producción y la circulación de los saberes, haciendo un paralelo con la economía que estudia la producción y distribución de los bienes materiales. Esta forma de ver la didáctica se interesa en lo que estos fenómenos tienen de específico en el conocimiento que se tiene en la mira, es decir el saber científico.

El paralelo que hace G. Glaesser de la didáctica con la medicina resulta muy ilustrativo y sencillo. Él distingue entre la didáctica y el quehacer de los profesores, tal como la ciencia médica se distingue del quehacer de los médicos, y dice que tal como las investigaciones en medicina iluminan el quehacer de los médicos, las investigaciones en didáctica deben iluminar el quehacer de los profesores.

INTERPRETACIONES DE LA DIDÁCTICA:



Nosotros concordamos con las posiciones que conciben a la didáctica como dominio científico, por esta razón el título del presente texto.

Para Guy Brousseau, la naturaleza y la práctica de los conocimientos enseñados desempeña un papel mucho más importante de lo que decía Comenius en el arte y la técnica de la enseñanza; él afirma: “La Didáctica es la ciencia que estudia la difusión de los *conocimientos* útiles a los hombres que viven en sociedad. Se interesa por la producción, la difusión y el aprendizaje de los conocimientos, así como por las instituciones y actividades que los facilitan.” De este modo, la didáctica, como actividad social o profesional, es todo aquello que tiende a la enseñanza de un conocimiento, de una ciencia, de un arte o de una lengua.

Esta actividad es el objeto que estudia la Didáctica como ciencia, y no es a priori la especificación de una didáctica general. Cuando hablamos de “didáctica”, hablamos de las relaciones entre un aprendiz, algo que debe ser aprendido bajo la decisión de alguien

y un “medio” que provoca el aprendizaje. Hemos mostrado que los saberes culturales no pueden aprenderse sin la presencia, en el medio, de un sistema enseñante.

En Didáctica de las matemáticas, lo que debe ser aprendido es generalmente un concepto matemático él utilizó los métodos clásicos de las ciencias experimentales y principalmente **la observación, la modelización y los métodos estadísticos.**

Veamos algunos **conceptos claves**: El dominio de estudio de la Didáctica de la Matemática (DDM), son los **fenómenos** que el didacta se propone estudiar y aquellos que rechaza deliberadamente del campo de la investigación.

Estos fenómenos ponen en juego “objetos” cuyas relaciones mutuas serán analizadas gracias a conceptos elaborados para tal efecto. **La problemática**, precisa el conjunto de interrogantes que el didacta se plantea o no se plantea a propósito, así como las respuestas o resultados que se pueden esperar. **Los postulados** que se aceptan sin probar, a priori, cuya justificación se obtendrán a posteriori en tanto se obtenga una coherencia de estas presunciones con los resultados obtenidos. **La metodología** que es tomada de las ciencias experimentales y sociales que se ponen en práctica.

Al campo de estudio de la didáctica le corresponde entonces:

- a) Reconocer fenómenos didácticos.
- b) Reconocer los problemas de los sujetos y objetos que intervienen en la acción pedagógica.
- c) Reconocer un problema no resuelto de ingeniería didáctica.
- d) Identificar y clasificar un trabajo original de ingeniería y precisar sus condiciones de uso y de réplica.
- e) Reconocer las creaciones e invenciones y los procesos de búsqueda.
- f) Reconocer y hacer que se reconozca la producción científica.

Los escenarios para el estudio de este tipo de fenómenos son las situaciones didácticas o de psicogénesis. Los objetos que intervienen son: estudiantes, contenidos matemáticos y los agentes educativos.

No hay investigación científica que no comience por precisar los “objetos” que ella explora. Se distingue entre “objetos de estudio” y “objetos explicativos”, aunque en ciertos casos el mismo objeto pueda jugar los dos roles. Ellos deben satisfacer principios de pertinencia que los hacen compatibles con un conocimiento científico y que les permita someterse a **métodos experimentales**, dependiendo de los avances de la tecnología de la época. Por ejemplo, los átomos en los tiempos de Demócrito y Epicuro no eran sino objetos de especulación filosófica, es decir, se necesita un **marco teórico** para explicar los fenómenos didácticos en estudio.

Relación con el saber. Relatividad del conocimiento respecto de las instituciones: Recientemente, Chevallard (1989) ha adoptado una posición de notable generalidad para los estudios de didáctica. Desde una perspectiva antropológica, la Didáctica de la matemática sería el estudio del hombre -las sociedades humanas- aprendiendo y enseñando matemáticas.

Para Chevallard (1989), el objeto principal de estudio de la Didáctica de la matemática está constituido por los diferentes tipos de sistemas didácticos, formados por los subsistemas: enseñantes, alumnos y saberes enseñados, que existan actualmente o que puedan ser creados, por ejemplo, mediante la organización de un tipo especial de enseñanza.

Enfoque antropológico

Didáctica de la matemática $\Leftrightarrow$ estudio del hombre aprendiendo y enseñando matemáticas.

La problemática del estudio puede ser formulada, globalmente y a grandes rasgos, con la ayuda del concepto de relación con el saber, *rapport au savoir* (institucional y personal).

$R = \text{Relación}; I = \text{Institución}; S = \text{Saber}$

$R(I, S)$

Para este autor, dado un objeto conceptual, “saber” o “conocer”, dicho objeto no es un concepto absoluto, sino que depende de la institución en que se encuentra el sujeto. Así, la expresión “sabe probabilidad”, referida a una persona dada, puede ser cierta si nos referimos a las probabilidades estudiadas en la escuela y falsa si nos referimos al mundo académico, e incluso en éste habría que diferenciar si nos referimos al conocimiento necesario para la enseñanza en los primeros cursos de una carrera técnica o al que sería preciso para realizar investigación teórica sobre Cálculo de probabilidades.

Hay que distinguir pues, entre relación institucional (saber referido al objeto conceptual, que se considera aceptable dentro de una institución) y relación personal (conocimiento sobre el objeto de una persona dada) que pueden estar o no en coincidencia, generalmente la relación institucional es una restricción a la relación personal.

$$R = \text{Relación}; P = \text{Persona}; S = \text{Saber}$$
$$R(P, S)$$

Sobre estos conceptos, se plantean dos preguntas fundamentales:

- 1. ¿Cuáles son las condiciones que aseguran la viabilidad didáctica de tal elemento del saber y de tal relación institucional y personal a este elemento del saber?***
- 2. ¿Cuáles son las restricciones que pueden impedir satisfacer estas condiciones?***

El problema central de la didáctica, es para este autor, el estudio de la relación institucional con el saber, de sus condiciones y de sus efectos. Estudiar la relación personal es en la práctica fundamental, pero epistemológicamente secundario. Este estudio, sin embargo, no puede tener éxito sin tomar en consideración al conjunto de condicionantes cognitivos, culturales, sociales, inconscientes, fisiológicos, etc. del alumno, que juegan o pueden jugar un papel en la formación de su relación personal con el objeto de saber en cuestión.

¿Son equivalentes la relación personal con la relación institucional?

$$¿R(P, S) \approx R(I, S) ?$$

Es decir, en el enfoque antropológico, desde el punto de vista ideal, la relación personal con el saber debería coincidir con la relación institucional con el saber.

Por ejemplo:

¿Cómo es la relación personal del profesor con el saber “ $\frac{1}{2}$ ”?; $R(P, \frac{1}{2})$.

¿Qué es $\frac{1}{2}$? Los profesores responden: “una división uno entre dos”, “una fracción un medio”, “un número racional”, “la proporción uno es a dos”, “una probabilidad uno de dos”, “una fracción decimal”, etc. ¿Usted cómo respondería?

Por otro lado:

¿Cuál es la relación institucional con el saber $\frac{1}{2}$?; $R(I, \frac{1}{2})$.

¿En una institución particular y en una estatal se enseñará de la misma manera el saber “ $\frac{1}{2}$ ”? ¿Las fracciones, racionales o proporciones son enseñadas de la misma manera en dos instituciones diferentes?

¿Acaso no deberían coincidir estas dos relaciones?

Es decir: $R(P, \frac{1}{2}) \approx R(I, \frac{1}{2})$

1.2. La didáctica de la matemática²

Didáctica de cualquier materia significa, en palabras de Freudenthal (1991), la organización de los procesos de enseñanza y aprendizaje relevantes para tal materia. Los didactas son organizadores, desarrolladores de educación, autores de libros de texto, profesores de toda clase, incluso los estudiantes que organizan su propio aprendizaje individual o grupal.

2 Guzmán, Ismenia. 1999. *Apuntes de la asignatura de Fundamentos de la didáctica*. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso-Chile.

Debido a la complejidad de los procesos presentes en toda situación de enseñanza y aprendizaje, Schoenfeld (1987) postula una hipótesis básica consistente en que, a pesar de la complejidad, las estructuras mentales de los alumnos pueden ser comprendidas y que tal comprensión ayudará a conocer mejor los modos en que el pensamiento y el aprendizaje tienen lugar. El centro de interés es, por lo tanto, explicar qué es lo que produce el pensamiento productivo e identificar las capacidades que permiten resolver problemas significativos.

Las teorías científicas no pueden ser realizaciones individuales ni hechos aislados. Debe haber una comunidad de personas entre las que exista un acuerdo, al menos implícito, sobre los problemas significativos de investigación y los procedimientos aceptables de plantearlos y resolverlos. Es preciso compaginar la autonomía personal en la elaboración de ideas y conceptos nuevos con la necesidad de que estas ideas sean contrastadas y compartidas. Las teorías son pues, fruto o consecuencias de las líneas de investigación sostenidas por una comunidad más o menos grande de especialistas en un campo determinado.

Existen teorías generales del aprendizaje y teorías de la enseñanza, pero, cabe preguntarse ¿aprendizaje de qué?, ¿enseñanza de qué? Los fenómenos del aprendizaje y de la enseñanza se refieren a conocimientos particulares y posiblemente la explicación y predicción de estos fenómenos depende de la especificidad de los conocimientos enseñados, además de factores psicopedagógicos, sociales y culturales. Esto es, los factores “saber a aprender” y “saber a enseñar” pueden implicar interacciones con los restantes, que obligue a cambiar sustancialmente la explicación de los fenómenos didácticos, así como la programación de la enseñanza, el desarrollo del currículo, la práctica de la educación matemática o de la didáctica matemática, que precisan tener en cuenta esta especificidad.

La insuficiencia de las teorías didácticas generales lleva necesariamente a la superación de las mismas mediante la formulación de otras nuevas, más ajustadas a los fenómenos que se tratan de explicar y predecir. Incluso pueden surgir nuevos planteamientos,

formulaciones nuevas y más audaces que pueden revolucionar, por qué no, los cimientos de teorías establecidas.

Nos preguntamos si para la didáctica de la matemática existe esa comunidad de investigadores en la cual pueda surgir uno o varios programas de investigación que produzca una teoría o teorías de la educación matemática, veremos que sí y lo constituye la Escuela francesa de didáctica de la matemática.

La educación matemática o didáctica de la matemática, explica Fischbein, plantea sus propios problemas psicológicos que un psicólogo profesional nunca encuentra en su propia área. Normalmente un psicólogo no se interesa por los tipos específicos de problemas de representación que aparecen en las matemáticas desde la representación gráfica de funciones y distintas clases de morfismos, a la dinámica del simbolismo matemático. Es extraño que un psicólogo cognitivo se interese y trate los problemas planteados por la comprensión del infinito matemático con todas sus distintas facetas y dificultades.

Con el fin de poder afrontar estos problemas se necesita un sistema particular de conceptos, además de los generales inspirados por la psicología, pero incluso los conceptos psicológicos usuales adquieren nuevo significado a la luz de las matemáticas y de la educación matemática.

Aprendizaje matemático y constructivismo

La instrucción basada en principios conductistas tiende a fragmentar el currículo en un número de partes aisladas que podrían aprenderse a través de un refuerzo apropiado, pero la instrucción efectiva de las matemáticas necesita sustentarse en la comprensión de los conceptos matemáticos básicos.

En el caso de teorías del aprendizaje derivadas de la epistemología genética de Piaget, si bien la ejecución de tareas piagetianas está correlacionada con logros aritméticos, las operaciones lógicas no han suministrado la ayuda adecuada para explicar la capacidad del niño para aprender los conceptos y destrezas matemáticas básicas.

De los estudios cognitivos se deduce uno de los supuestos básicos subyacentes de la investigación actual sobre aprendizaje. Consiste en aceptar que el niño construye de un modo activo el conocimiento a través de la interacción con el medio y la organización de sus propios constructos mentales. Aunque la instrucción afecta claramente lo que el niño aprende, no determina tal aprendizaje, el niño no es un receptor pasivo del conocimiento, lo interpreta, lo estructura y lo asimila a la luz de sus propios esquemas mentales.

Como afirma Vergnaud (1990), la mayoría de los psicólogos interesados hoy por la educación matemática son en algún sentido constructivistas, piensan que las competencias y concepciones son construidas por los propios estudiantes. Para Kilpatrick (1987), el punto de vista constructivista implica dos principios:

1. El conocimiento es construido activamente por el sujeto que conoce, no es recibido pasivamente del entorno.
2. Llegar a conocer es un proceso adaptativo que organiza el propio mundo experiencial. No se descubre un mundo independiente, preexistente, exterior a la mente del sujeto.

Pero el hecho de que la mayoría de los investigadores no especifiquen suficientemente las condiciones físicas y sociales bajo las cuales tiene lugar el conocimiento, abre el camino a una amplia variedad de posiciones epistemológicas. Desde el constructivismo simple (trivial para algunos) que solo reconoce el principio mencionado, al constructivismo radical que acepta los dos principios y, por tanto, niega la posibilidad de la mente para reflejar aspectos objetivos de la realidad. También se habla del constructivismo social, que refuerza el papel fundamental del **conflicto cognitivo** en la construcción de la objetividad.

La solución epistemológica, afirma Vergnaud, es en principio bastante sencillo: **La construcción del conocimiento consiste en la construcción progresiva de representaciones mentales, implícitas o explícitas, que son homomórficas a la realidad para algunos aspectos y no lo son para otros.**

Aprendizaje matemático y procesamiento de la información

Como afirma Orton (1990), no existe ninguna teoría del aprendizaje de las matemáticas que incorpore todos los detalles que cabría esperar y que tenga aceptación general. Según este autor, se identifican en la actualidad dos corrientes de investigación sobre este campo: el enfoque constructivista (considerado anteriormente), y el enfoque de ciencia cognitiva, procesamiento de la información, de gran impacto en las investigaciones sobre el aprendizaje matemático.

Según Schoenfeld (1987), una hipótesis básica subyacente de los trabajos en ciencia cognitiva es que las estructuras mentales y los procesos cognitivos son extremadamente ricos y complejos, pero que tales estructuras pueden ser comprendidas y que esta comprensión ayudará a conocer mejor los modos en los que el pensamiento y el aprendizaje tienen lugar. El centro de interés es explicar aquello que produce el “pensamiento productivo”, o sea las **capacidades de resolver problemas significativos**.

El campo de la ciencia cognitiva intenta capitalizar el potencial de la metáfora que asemeja el funcionamiento de la mente a un ordenador para comprender el funcionamiento de la cognición como procesamiento de la información, y como consecuencia comprender los procesos de enseñanza y aprendizaje. Se considera que el cerebro y la mente están vinculados como el ordenador y el programa.

El punto de vista dominante en ciencia cognitiva actual es que la cognición es llevada a cabo por un mecanismo de procesamiento central controlado por algún tipo de sistema ejecutivo que ayuda a la cognición a ser consciente de lo que está haciendo. Los modelos de la mente se equiparán a los modelos de ordenadores de propósito general con un procesador central capaz de almacenar y ejecutar secuencialmente programas escritos en un lenguaje de alto nivel. En estos modelos, la mente se considera como esencialmente unitaria, y las estructuras y operaciones mentales se consideran como invariantes para los distintos contenidos. Se cree que un mecanismo único está en la base de las capacidades de resolución de una cierta clase de problemas.

Desde el punto de vista metodológico, los científicos cognitivos hacen observaciones detalladas de los procesos de resolución de problemas por los individuos. Buscan regularidades en sus conductas de resolución e intentan caracterizar dichas regularidades con suficiente precisión y detalle para que los estudiantes puedan tomar esas caracterizaciones como guías para la resolución de los problemas. Tratan de construir “modelos de proceso” de la comprensión de los estudiantes que serán puestos a prueba mediante programas de ordenador que simulan el comportamiento del que resuelve.

Como educadores matemáticos debemos preguntarnos si la metáfora del ordenador proporciona un modelo de funcionamiento de la mente que pueda ser adecuada para explicar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática y cuáles son las consecuencias para la instrucción matemática de las teorías del procesamiento de la información.

Al respecto, Kilpatrick (1985) nos advierte que “Podemos usar la metáfora del ordenador sin caer prisioneros de ella, debemos recordarnos a nosotros mismos que al caracterizar la educación como transmisión de información, corremos el riesgo de distorsionar nuestras tareas como profesores. Podemos usar la palabra información, pero al mismo tiempo reconocer que hay varios tipos de ella y que algo se pierde cuando definimos los fines de la educación en términos de ganancia de información”.

Otros autores propugnan un enfoque diferente al de los procesos de resolución de problemas y enseñanza-aprendizaje que **asignan un papel más activo al que resuelve, y tienen en cuenta las peculiaridades del contenido matemático, así como el papel del profesor y de la interacción social en el aula.**

1.3. La didáctica de la matemática como disciplina científica

"Nada hay más práctico que una buena teoría" (Anónimo).

Dentro de la comunidad de investigadores que, desde diversas disciplinas, se interesan por los problemas relacionados con la didáctica de la matemática, se han ido destacando en los últimos años, principalmente en Francia, nombres como Guy Brousseau, Yves Chevallard, Gerard Vergnaud, Michelle Artigue, Regine Douady, Raymond Duval, etc., un grupo que se esfuerza en una reflexión teórica sobre el objeto y los métodos de investigación específicos en didáctica de la matemática.

Fruto de este esfuerzo ha surgido una concepción llamada por sus autores “*fundamental*” de la didáctica, la misma que presenta características diferentes respecto a otros enfoques: concepción global de la enseñanza estrechamente ligada a la matemática y a teorías específicas de aprendizaje y búsqueda de paradigmas propios de investigación en una postura integradora entre los métodos cuantitativos y cualitativos.

Como característica de esta línea puede citarse el interés por establecer un marco teórico original, desarrollando sus propios conceptos y métodos y considerando las situaciones de enseñanza-aprendizaje globalmente, los modelos desarrollados comprenden las dimensiones epistemológicas, sociales y cognitivas, y tratan de tener en cuenta la complejidad de las interacciones entre el saber, los alumnos y el profesor, dentro del contexto particular de la clase.

El estudio de las relaciones complejas entre la enseñanza y el aprendizaje, en aquellos aspectos que son específicos de las matemáticas, queda concretado por Laborde (1989) en estas dos preguntas:

- 1. ¿Cómo podemos caracterizar las condiciones que deben implementarse en la enseñanza para facilitar un aprendizaje que reúna ciertas características fijadas a priori?***
- 2. ¿Qué elementos debe poseer la descripción de un proceso de enseñanza para asegurar que pueda ser reproducido desde el punto de vista del aprendizaje que induce en los alumnos?***

Un criterio básico que guía la investigación de estas problemáticas es la determinación del significado del conocimiento matemático que se desea *a priori*, que construyan los alumnos y del que realmente alcanzan durante el proceso de enseñanza.

Como afirma Laborde (1989), existe consenso sobre el requisito metodológico de utilizar la experimentación en una interacción dialéctica con la teoría. El paradigma experimental es concebido dentro de un marco teórico y las observaciones experimentales son comparadas con ese marco, pudiendo ser modificado éste a la luz de la consistencia de los conceptos desarrollados y la minuciosidad en relación a todos los fenómenos relevantes.

Enseñanza:
Viene del latín “*in signare*” que quiere decir: señalar, mostrar algo e “*instruir*”.

Estructura didáctica



* Los conceptos de **Contrato didáctico** y **Transposición didáctica**, serán desarrollados posteriormente.

Al respecto, Guy Brousseau (1989) define la concepción fundamental de la didáctica de la matemática como “una ciencia que se interesa por la producción y comunicación de los conocimientos matemáticos, en lo que esta producción y esta comunicación tienen de específicos de los mismos”, indicando, como objetos particulares de estudio:

- Las operaciones esenciales de la difusión de los conocimientos, las condiciones de esta difusión y las transformaciones que produce, tanto sobre los conocimientos como sobre sus utilizadores.
- Las instituciones y las actividades que tienen por objeto facilitar estas operaciones.

Los didactas que comparten esta concepción de la didáctica relacionan todos los aspectos de su actividad con las matemáticas. El argumento es que el estudio de las transformaciones de la matemática, ya sea desde el punto de vista de la investigación o de la enseñanza siempre ha formado parte de la actividad del matemático, de igual modo que la búsqueda de problemas y situaciones que requiera para su solución una noción matemática o un teorema.

Una característica importante de esta teoría, aunque no sea original ni exclusiva, es su consideración de los fenómenos de enseñanza y aprendizaje bajo el enfoque sistémico. Con esta perspectiva, el funcionamiento global de un hecho didáctico no puede ser explicado por el estudio separado de cada uno de sus componentes, de igual manera que ocurre con los fenómenos económicos o sociales.

Asimismo, Chevallard y Johsua (1982) describen **El sistema didáctico** en sentido estricto formado esencialmente por tres subsistemas: *Profesor, alumno y saber enseñado*. Además, está el mundo exterior a la escuela, en el que se hallan la sociedad en general, los padres, los matemáticos, etc., pero, entre los dos, entre el sistema didáctico y el mundo exterior a la escuela, debe considerarse una zona intermedia, la noosfera.

La noosfera³ está integrada a la sociedad y constituye con él el sistema didáctico en sentido amplio, y que es lugar, a la vez, de conflictos y transacciones por las que se realiza la articulación entre el sistema y su entorno. La noosfera es por tanto “la capa exterior que contiene todas las personas que en la sociedad piensan sobre los contenidos y métodos de enseñanza”. A su vez, Brousseau (1986) considera como

3 Noosfera: Conjunto de los seres inteligentes con el medio en que viven.

componente el **medio** que está formado por el subsistema sobre el cual actúa el alumno (materiales, juegos, situaciones didácticas, etc.).

Contrato didáctico

El contrato didáctico es el conjunto de reglas, con frecuencia no enunciadas explícitamente, que organizan las relaciones entre el contenido enseñado, los alumnos y el profesor dentro de la clase de matemáticas. (Brousseau, 1986). Como ejemplo de este fenómeno se suele citar la investigación de Stella Baruk, referida a la contestación de una amplia muestra de alumnos al problema denominado “*la edad del capitán*”. Un enunciado típico de este problema es el siguiente:

Un barco mide 37 metros de largo y 5 de ancho

¿Cuál es la edad del capitán?

Preguntados sobre este problema, la mayoría de los niños en los primeros años escolares responde que 42 o 32 años. Si se cambia el enunciado, incluyendo otros datos o variando los números se da como respuesta un valor que pueda obtenerse mediante operaciones aritméticas con los datos del enunciado. Son muy pocos los casos de niños que contestan que la pregunta no tiene sentido como, por ejemplo:

En un barco hay 7 cabras y 5 ovejas.

¿Qué edad tiene el capitán?

La mayoría de alumnos dan sin titubear una respuesta del tipo: “ $7 \times 5 = 35$. El capitán tiene 35 años”.

¿Qué pasa? ¿Por qué la mayoría de alumnos responden sin inmutarse a una pregunta absurda? ¿Será que la escuela los atonta en lugar de espabilarlos? ¿Será que se convierten en puros autómatas que sólo sirven para contestar al profesor? ¿Será que sus profesores no les han ayudado a desarrollar el “sentido crítico”? ¿Se trata de una muestra del fracaso de todo el sistema escolar de enseñanza de las matemáticas?

En una conferencia en la que participaban más de 300 personas que han concluido la secundaria, hemos planteado el mismo problema, y lo sorprendente es que algunas de ellas encontraron soluciones similares a las que dieron los niños en Francia.

El interés de esta noción de contrato didáctico se debe a que muchos estudiantes responden a una situación, no según un razonamiento matemático esperado, sino como consecuencia de un proceso de decodificación de las convenciones didácticas implícitas, “*datos, planteo, operación y respuesta*”. Los estudios sobre el contrato didáctico y sus relaciones con los procesos de aprendizaje son esenciales ya que lo que está en juego es el significado real del conocimiento construido por los alumnos.

En todo caso, parece fuera de duda, que existe en Francia una línea de investigación (en el sentido de Bunge) dentro del campo de la didáctica de la matemática, con una problemática esencialmente original, como pone de manifiesto Balachef (1990), que puede significar una ruptura epistemológica para esta disciplina científica.

Las ideas sobre el contenido que se enseña son ignoradas a menudo o se considera que están al margen del espectro de indagación en la mayoría de las investigaciones sobre la enseñanza. Los estudios sobre enseñanza de las matemáticas hechos bajo un paradigma interpretativo, aunque son considerablemente menos numerosos que los positivistas, son interesantes ya que a través de diferentes lentes conceptuales se iluminan diversos aspectos de la enseñanza de la matemática. Como ejemplo puede citarse la **línea de investigación sobre el pensamiento del profesor acerca de la matemática y su enseñanza y el efecto de estas concepciones sobre su acción docente**.

Entre las teorías generales que se han proyectado sobre la educación matemática, y que solo han sido mencionadas, destacamos el conductismo, el aprendizaje por descubrimiento (Bruner), el aprendizaje significativo (Ausubel), mediante materiales didácticos (Dienes). Otra teoría relevante para la investigación didáctica en geometría es la de los niveles de razonamiento de los esposos Van Hiele.

Estudios sobre el contrato didáctico y sus relaciones con los procesos de enseñanza deberían abordar el siguiente problema: ¿Una situación solo puede utilizarse para repetir las preguntas, en enseñar cómo se establece la respuesta y en hacer reproducir las técnicas de conteo en asociaciones pregunta-respuesta hasta lograr una reproducción perfecta? o ¿Las preguntas de evaluación siempre son tales que hace falta conocer la respuesta para comprender la pregunta?

El profesor no debe decir explícitamente de antemano lo que el alumno tendrá que hacer frente a un problema, sin quitarle, al hacerlo, la posibilidad de manifestar o de adquirir el conocimiento correspondiente. El profesor no debe comprometerse a “hacer comprender” un conocimiento, y aún menos a hacer que se produzca “nadie sabe cómo ‘se hacen’ matemáticas nuevas, y menos aún cómo se puede ‘hacer hacerlas’ de manera certera”.

Ingeniería didáctica

La ingeniería didáctica surgió en la didáctica de la matemática francesa a principios de los años ochenta del siglo pasado, como una metodología para las realizaciones tecnológicas de los hallazgos de la teoría de Situaciones didácticas y de la Transposición didáctica. El nombre surgió de la analogía con la actividad de un ingeniero quien, según Michelle Artigue dijo: “Para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Sin embargo, al mismo tiempo, se encuentra obligado a trabajar con objetos mucho más complejos que los depurados por la ciencia y, por lo tanto, tiene que abordar prácticamente, con todos los medios disponibles, problemas de los que la ciencia no quiere o no puede hacerse cargo.”

En realidad, el término ingeniería didáctica se utiliza en didáctica de las matemáticas con doble función: como metodología de investigación y como producción de situaciones de enseñanza y aprendizaje.

1.4. La didáctica clásica. Límites del punto de vista clásico en didáctica

La evolución de la didáctica de las matemáticas está determinada por sucesivas ampliaciones de la problemática didáctica, en especial a principios de los años 70 del siglo pasado. Según Josep Gascón, es debido a la inclusión del *conocimiento matemático* como objeto **primario** de investigación, se reivindica el estatuto del “saber científico” para la didáctica de las matemáticas y se pretende, *reconstruir la génesis de la didáctica “fundamental”*, entendida como el resultado de sucesivas ampliaciones de la ***problemática espontánea del profesor***.

La enseñanza de las matemáticas se consideraba un arte, por lo tanto, difícilmente susceptible de ser analizada, controlada y sometida a reglas. Se suponía que el aprendizaje dependía solo del grado en que el profesor dominara dicho arte y, al mismo tiempo, de la voluntad y la capacidad de los alumnos para dejarse moldear por el artista. Esto representa una “concepción” precientífica de la enseñanza que sigue teniendo influencia en la cultura escolar. En su evolución, a medida que crecía el interés por entender y explicar los hechos didácticos, fue consolidándose un ***punto de vista clásico***, que considera el aprendizaje en general, y el de las matemáticas en particular, como un proceso psicocognitivo fuertemente influenciado por factores motivacionales, afectivos y sociales. (Piaget, Vygotsky y Bruner).

Es lógico que, en la primera etapa del desarrollo de la didáctica, para luchar más eficazmente contra la visión precientífica de los hechos didácticos, se tomase la ***Psicología educativa*** como fundamento científico y se intentase adaptar al caso de las matemáticas la noción de “aprendizaje” que esta disciplina proporcionaba. Por ejemplo, la noción de “aprendizaje significativo” (Ausubel, 1968), cuya insuficiencia llevó a elaborar, dentro del enfoque clásico de la didáctica, una noción de “aprendizaje específicamente matemático”.

Mencionaremos dos características del ***Punto de vista clásico***:

- a) *Toma como problemática didáctica una ampliación limitada de la problemática espontánea del profesor.*

Esto significa que recoge, reformula, amplía y sistematiza las cuestiones que constituyen inicialmente la *problemática del profesor*, las cuales están muy condicionadas por las *ideas dominantes en la cultura escolar*, entre las cuestiones que constituyen la problemática del profesor, podemos citar:

- El problema de la naturaleza de los conocimientos previos de los alumnos.
- El problema de la motivación necesaria para el aprendizaje.
- El problema de los instrumentos tecnológicos de la enseñanza.
- El problema de la diversidad.
- El problema de cómo enseñar a resolver problemas de matemáticas.
- El problema de cómo evaluar a los alumnos y otros muchos.

Incluso, los términos en que se plantean estas cuestiones, como “motivación”, “diversidad”, “evaluación”, etc., dependen de la cultura escolar dominante y que está dominada por los documentos curriculares y por el discurso de la noosfera. Las posibles “«respuestas” imaginables por el profesor a dicha problemática se corresponden siempre con las ideas dominantes que pueden expresarse en forma de eslóganes pedagógicos: “Enseñanza personalizada”, “Motivación a través de materiales relacionados con la realidad y los intereses de los alumnos”, “Utilización de medios informáticos”, “Enseñanza a través de la resolución de problemas”, etc.

b) *Presenta el saber didáctico como un saber técnico, en el sentido de aplicación de otros saberes más fundamentales importados de otras disciplinas.*

Esto implica, considerar la didáctica de las matemáticas como una disciplina más normativa que explicativa.

Desde este ***Punto de vista clásico***, la didáctica de las matemáticas tiene como objetivo primero y principal proporcionar al profesor los recursos profesionales que éste requiere para llevar a cabo su labor de la manera más satisfactoria posible.

Dos enfoques clásicos: El aprendizaje del alumno y el pensamiento del profesor

En el primer enfoque, el objeto primario de investigación es el conocimiento matemático del alumno y su evolución. Como por ejemplo la noción de “Aprendizaje significativo” en el sentido de Ausubel. El segundo enfoque, aunque centrado en la actividad docente comparte el interés básico por la instrucción del alumno. Este enfoque amplía la problemática didáctica introduciendo cuestiones relativas al profesor y a su formación profesional. Esta nueva problemática puede formularse en los siguientes términos:

“¿Qué conocimientos (en el sentido amplio de saber y saber hacer) debe tener el profesor para favorecer un aprendizaje efectivo de los alumnos?”

El objetivo primario de investigación es el pensamiento del profesor que incluye su conocimiento de las matemáticas, de los procesos de enseñanza y aprendizaje y su experiencia en la práctica docente. Se trata de un conjunto de conocimientos “profesionales” cuya construcción y justificación requiere una base multidisciplinaria que abarque, además de la psicología educativa, la sociología, la historia de las matemáticas, la pedagogía y la epistemología de las matemáticas, entre otras disciplinas.

Se postula la formación del profesor comenzando por la transformación del “pensamiento docente espontáneo” en un sentido análogo a la necesidad de transformar el pensamiento espontáneo del alumno, sus preconceptos y errores conceptuales, para posibilitar su aprendizaje.

Un ejemplo paradigmático, según Brousseau (1989), de confusión entre saber didáctico y saber necesario para enseñar, que responden a dos lógicas distintas, lo encontramos en la “investigación-acción”.

Lo que es verdaderamente característico del punto de vista clásico, no es la mayor o menor importancia que se dé a la fundamentación psicológica, ni al hecho que se centre en uno u otro de los protagonistas de la relación didáctica, si no, que asume acríticamente que, o bien los saberes que utiliza no son problemáticos en sí mismos (como los saberes matemáticos), o bien no forman parte de la problemática didáctica (como los psicológicos, sociológicos o lingüísticos).

En todo caso, dichos saberes solo pueden ser aplicados para describir e interpretar los hechos didácticos. Pero *nunca pueden ser modificados como consecuencia de dicha aplicación*. Por ejemplo, no es posible que, en el ámbito de la didáctica clásica, *los hechos didácticos* modifiquen la noción misma de “aprendizaje significativo”.

Aprendizaje

*Proviene del latín “apprehendere” que significa: adquirir, coger, apoderarse de algo.
Etimológicamente sería hacer propio los contenidos tratados en el acto educativo.*

Límites del Punto de vista clásico en didáctica

- 1) Paradójicamente, no incluye entre sus objetos de estudio las nociones de “enseñar matemáticas” ni de “aprender matemáticas”, entre otras. Solo ***las utiliza como nociones transparentes y no cuestionables***, o como nociones construidas en otras disciplinas.
- 2) Al centrar el análisis en el alumno o el profesor en referencia al alumno, aborda su objeto de estudio condicionada enormemente por los fenómenos psicológicos involucrados en el proceso de enseñanza aprendizaje, al tiempo que tiende a poner en segundo plano los fenómenos específicamente didáctico-matemáticos. En la práctica implica una subordinación y ***casi una reducción de lo didáctico a lo psicológico***.
- 3) Al interpretar el saber didáctico como un saber técnico (en el sentido de que su justificación hay que buscarla en saberes científicos ajenos a la didáctica e independientes entre sí), el enfoque clásico ***renuncia a la ambición de construir la didáctica de las matemáticas como disciplina científica***.

Autores como Jeremy Kilpatrick, han enfatizado las necesidades teóricas de la investigación en “educación matemática”. Por su parte, Schoenfeld subraya la importancia capital de disponer de una teoría, pero ¿en qué saberes científicos hay que fundamentar esa teoría? Él considera que los “elementos” básicos para elaborar un marco en el que pueda analizarse la actividad matemática son: El conocimiento de base,

las estrategias heurísticas, las “estrategias de control y gestión” del proceso y el sistema de creencias.

Hay que subrayar que todos estos elementos *hacen referencia a la cognición*, ya sea a sus aspectos conceptuales o procedimentales, *a la “metacognición”* o a los aspectos afectivos de la cognición.

En definitiva, en el marco del enfoque clásico de la didáctica, la teoría del aprendizaje (también del aprendizaje matemático) *se fundamenta, en última instancia, en las ciencias cognitivas*.

1.5. Fuentes de la investigación de la didáctica

Las fuentes de investigación de la didáctica son:

- Los alumnos: Sus comportamientos y resultados bajo ciertas condiciones específicas de enseñanza.
- Las situaciones de enseñanza-aprendizaje: Las condiciones de creación y metas.
- La puesta en juego de una situación didáctica: Condiciones para su gestión.
- Los fenómenos didácticos: Fenómenos que enfrentan los profesores mismos en situación de enseñanza y los alumnos en situación de aprendizaje, fenómenos de comunicación, ...

Los fenómenos didácticos, son actos o hechos que suceden regularmente en distintas aulas y en distintos lugares. Fenómenos que se producen en situación de aprendizaje o enseñanza e involucra a alguno de los actores, o en la puesta en práctica de una propuesta de enseñanza o situación de aprendizaje, o en la interacción entre los actores en el aula; localizado el fenómeno, se analiza y se trata de precisar la problemática que plantea.

Veamos un ejemplo con que Brousseau ilustra este punto: En la Escuela Básica se enseña a seguir reglas para calcular, a pasar de un término sin variable a otro que es igual, hasta obtener un resultado: “ $3 + 4 = 7$ ”, lo que se lee, efectuando correctamente el cálculo $3 + 4$ se obtiene 7. Pero siendo $3 + 4$ igual a 7, el niño no puede reemplazarlo

como respuesta. No es equivalente en este momento, pues el signo igual no está representando una relación de equivalencia. Cuando este alumno aprenda álgebra, se le enseñará a pasar de una fórmula a otra que, le es lógicamente equivalente, hasta obtener una fórmula utilizable para el objetivo planteado:

$$\text{Si } 3 + 4 = 7 \text{ y } 7 = x + 4, \text{ entonces } x = 3.$$

Podría creerse que tanto el profesor como el alumno utilizan los conocimientos anteriores más otros nuevos, es decir, que se limitan a escribir lo que antes solo se hacía mentalmente. Que bastaría con ver: “3 + 4” como número, “x” como número, “=” como identidad. Pero no es así, todo ha cambiado en esas escrituras familiares, el uso que se hace de ellas, el sentido que se les da, el objetivo de las transformaciones con que se las opera, etc.

El alumno debe entonces no solamente aprender conocimientos nuevos, sino que reaprender y reorganizar sus conocimientos anteriores y olvidar o **desaprender** parte de ellos. Este problema ha sido detectado por Yves Chevallard en 1989, y es un problema serio, que, según Brousseau, no se ha encarado. Se trata del estudio del aprendizaje en términos de cambios de relaciones con el Saber o en términos de transformaciones de los conocimientos del alumno.

Brousseau afirma que: “***no sabemos describir bien el rol que juegan los conocimientos ya aprendidos en la construcción de los nuevos***”. Él se pregunta: ¿Hay que dejar un lugar en la enseñanza a estas reorganizaciones de conocimientos ya aprendidos en relación con las yuxtaposiciones de nuevos aprendizajes?, ¿depende este lugar de los conceptos?, ¿existen conocimientos que obstaculizan nuevos aprendizajes?, ¿existen metodologías o técnicas pedagógicas más favorables que otras respecto a este asunto?

En la perspectiva de su teoría de Situaciones didácticas, Brousseau plantea una serie de interrogantes que abren muchas y variadas pistas de investigación del fenómeno didáctico. Para él, una **situación didáctica** es un conjunto de relaciones asociadas a un conocimiento. Esas relaciones constituyen una especie ***de juego y deben ser tales***

que el conocimiento involucrado es necesario para su realización, y la puesta en funcionamiento de ese conocimiento es un medio que asegura al jugador una estrategia ganadora.

Finalmente, hemos visto que **el Saber cambia, se modifica, no es igual para todos: creadores, usuarios, alumnos y profesores, el estudio y control de esas modificaciones es una tarea importante de la Didáctica de la matemática** que, entre otras, tiene la misión de:

- Reagrupar los **Saberes**.
- Reagrupar los **Problemas**.
- Reagrupar las **Situaciones**.
- Reagrupar los **Comportamientos de los alumnos**.
- Reagrupar las **Actividades**.

De manera que se puedan enunciar formas de investigación genéricas según las diferentes tipologías, y así poder comunicar a los especialistas, a los profesores y otros agentes educativos, los conceptos unificadores que se está produciendo.

“Un educador no tiene el sentido del FRACASO, precisamente porque se cree un maestro. Quien enseña manda. De ahí una oleada de instintos”.

1.6. Fenómenos didácticos⁴

"No existe ningún fenómeno aparte de los fenómenos observados"

Niels Böhr

Muchos fenómenos ligados al control de la transposición didáctica, *transformación de un saber desde que es presentado por un investigador a la sociedad hasta que es enseñado en el aula de clases*, se han podido poner en evidencia en contextos muy diferentes: el fenómeno mismo puede determinar la legitimidad de una lección, una clase en particular, o involucrar a toda una comunidad durante generaciones.

Identificar estos fenómenos se reduce a construir un “*modelo*” de los protagonistas, es decir Profesor, alumno y saber, en presencia de relaciones y dificultades que los relacionan estrechamente, y a demostrar que el juego de éstos produce muchos efectos evidentes, así como también el análisis del desarrollo mismo en observación.

En el presente trabajo, nos centraremos en los siguientes cuatro fenómenos:

1. Efecto Topaze y el control de lo incierto.
2. Efecto Jourdain o el malentendido fundamental.
3. Deslizamiento Metacognitivo.
4. Uso abusivo de analogías.

1. Efecto Topaze y el control de lo incierto

La primera escena del célebre “Topaze” de Marcel Pagnol ilustra uno de los procesos fundamentales: Topaze hace un dictado a un alumno débil. No pudiendo aceptar errores garrafales y no pudiendo tampoco dar directamente la ortografía pedida, él “sugiere” la respuesta disimulándola con códigos didácticos cada vez más transparentes: “... des moutons étaient réunis dans un parc...” se trata, para el alumno,

4. Guzmán, Ismenia. 1998. *Separata de la asignatura de Fundamentos de didáctica de la matemática*. Chile: Instituto de Matemática. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

de un problema de ortografía y de gramática. Él lee: “des moutonsee étai-hunt ...”, cambiando totalmente el problema.

“**Sugiere**, la respuesta disimulándola con códigos didácticos cada vez más transparentes”, significa que el profesor le “**sopla**” la respuesta, en nuestro idioma sucedería con el caso de la lectura y escritura de la “z”, por ejemplo, en “zapato”.

Ante los fracasos repetidos del alumno, Topaze mendiga un signo de adhesión y negocia por lo bajo las condiciones en las cuales el alumno terminará por poner esa “s”. Es fácil adivinar que él podría continuar exigiendo la recitación de la regla, luego haciéndola copiar unas cuantas veces, el fracaso del acto de enseñar está representada en la simple orden: ponga una “s” a “mouton” (moutons). El profesor terminó por hacer lo esencial del trabajo.

La respuesta que debía dar el alumno está determinada de antemano. El profesor elige preguntas a las cuales se puede dar esa respuesta. Evidentemente los conocimientos necesarios para producir esas respuestas cambian su significado también.

Tomando preguntas cada vez más fáciles, el profesor trata de obtener la significación máxima para el máximo de alumnos, es decir, si los conocimientos focalizados desaparecen completamente estamos frente al “efecto Topaze”.

El mantener el sentido a través de los cambios de preguntas permanece bajo el control de los conocimientos de los maestros en la disciplina enseñada, pero la elección de las situaciones de aprendizaje y su gestión, habitualmente dejada al sentido común de los maestros, son actualmente objeto de activas investigaciones, tanto teóricas como de ingeniería didáctica.

Por ejemplo, el profesor quiere recordar algunos conocimientos previos, acerca de los sistemas numéricos en el tercer año de secundaria y pregunta a sus estudiantes:

P: ¿Conocen los números naturales?

E: Sí.

P: ¿Los enteros, los racionales?

E: Sí.

P: ¿Algún otro conjunto de números?

E: Silencio en el aula.

P: ¿Cómo, no conocen otro conjunto de números?

E: Silencio en el aula.

P: ¿Ustedes conocen los números naturales, enteros racionales y también conocen los números $i...$, $i...$, $i...$?

E: ¡imaginarios!

P: No, ¿otra respuesta?

E: Irracionales.

P: ¡Muy bien!, ¿Ya ven? Ustedes conocen los números irracionales.

P: Entonces, los números reales son ...

En este caso, el profesor pregunta y les “sopla” la respuesta a los alumnos para así poder continuar su clase.

Otro problema a enfrentar es si el profesor pregunta: ¿Denme un ejemplo de número irracional?, la situación de aprendizaje cambia de sentido y se complica.

2. Efecto “Jourdain” o el malentendido fundamental.

El efecto Jourdain, llamado así en referencia a la escena del Bourgués, gentil hombre de Moliere, en que el maestro de filosofía revela a Jourdain lo que son la prosa o las vocales.

El profesor para evitar el debate de conocimiento con el alumno y eventualmente constatar el fracaso, se permite reconocer un índice de conocimiento científico en el comportamiento o en las respuestas del alumno, aunque ellas sean motivadas por causas triviales y de significación muy pobre.

Todo lo cómico de la escena está basado en lo ridículo de esta consagración repetida de actividades familiares en un discurso científico. Por ejemplo, un alumno, a quien se le ha propuesto manipulaciones con envases de yogurt o con cartas de colores, mira

sorprendido a su profesor cuando le dice: “tu acabas de descubrir un grupo de Klein”, o cuando los estudiantes juegan con los bloques lógicos, el profesor afirma: “Ya saben ustedes que es un cuadrado y lo que es un rectángulo, por ejemplo, “la puerta es un rectángulo”.

De una manera menos torpe, el deseo de insertar el conocimiento en actividades familiares puede conducir al profesor a sustituir la problemática verdadera y específica, por otra por ejemplo metafórica (cuando afirma: “algo así como ...”) o metonímica (latín: metonymia, cambio del sentido), que no da sentido correcto a la situación. A menudo las dos problemáticas están presentes, yuxtapuestas y el profesor trata de obtener “la mejor” adhesión de los estudiantes.

3. *El deslizamiento metacognitivo*

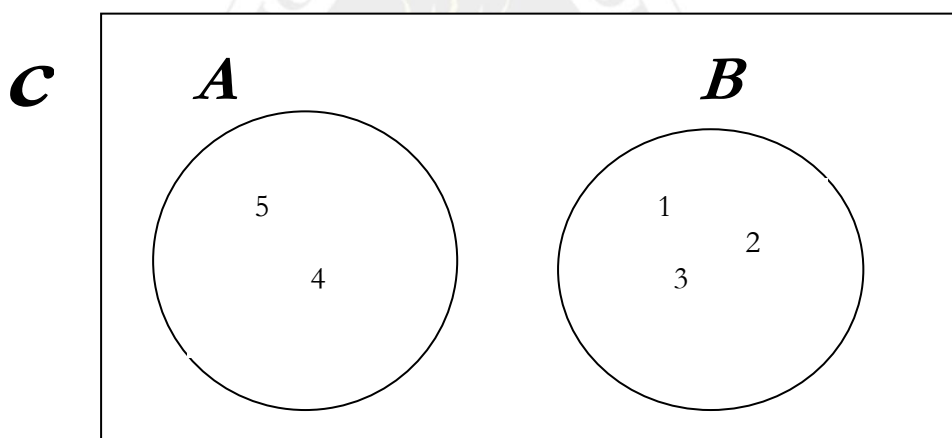
Cuando una actividad de enseñanza ha fracasado, el profesor puede verse en la necesidad de justificarse y para continuar con su acción, tomar sus propias explicaciones y medios heurísticos como objetos de estudio, en lugar de buscar el verdadero conocimiento matemático.

Este efecto puede ocurrir varias veces, involucrar a toda una comunidad y constituir un verdadero proceso que escape a sus actores. El ejemplo más impresionante es probablemente el uso de diagramas de flechas utilizado en los años 60 del siglo pasado para enseñar las estructuras, método al cual se le asoció el nombre de G. Papy. (Papy graphes).

A fines de los años 30 del siglo XX, la teoría de conjuntos abandona su función científica inicial para transformarse en medio de enseñanza con el objeto de satisfacer las necesidades que tienen los profesores de una metamatemática y de un formalismo fundamental. Por este hecho, los profesores se ven obligados a invitar a los estudiantes a un control semántico de esta teoría (llamada ahora “ingenua”), para evitar los errores, no basta aplicar axiomas, hay que saber de qué se habla y conocer las paradojas asociadas a la manera de utilizarlas, para evitarlas.

Este *medio* de enseñanza se vuelve objeto de enseñanza para niños cada vez más jóvenes. El control semántico se confía a un “*modelo*” que se remonta a Euler y recurre a diversos gráficos (Círculos de Euler, Diagramas de Venn, “Patatas” de Papy). El “modelo” de hecho no es un modelo correcto, no permite el control esperado y provoca dificultades de enseñanza, por ello, ese “medio” se vuelve a su vez un objeto de enseñanza y se recarga de convenciones, de lenguajes específicos que hay que enseñar y explicar en cada etapa de la difusión.

Por ejemplo, consideremos el Diagrama de Venn – Euler:



El conjunto **A** tiene 2 elementos y el conjunto **B** tiene 3 elementos, responda:

¿Cuántos elementos tiene el conjunto **C?**

No, no es 5. La mayoría de profesores respondería 5, y en la mayoría de textos escolares aparece $n(C) = 5$, que se lee: número de elementos del conjunto C es igual a 5.

En este proceso, la actividad de enseñanza produce más comentarios y convenciones. Los estudiantes pueden controlar cada vez menos las situaciones que se les proponen, esto es el efecto de “deslizamiento metacognitivo”. Sería ingenuo creer que el sentido común permitiría escapar a las consecuencias extravagantes a las que este proceso ha conducido. La fuerza de los efectos didácticos es inevitable desde el momento en que el profesor no puede sustraerse a la obligación de enseñar cueste lo que cueste.

Mientras más vasto es el público comprometido en esta negociación, más se escapa el proceso al control ingenuo. Por otra parte, el sentido común, como cualquier otro factor corrector, no puede jugar un rol en los procesos sociales sin la mediación de una estructura social adecuada. Existen pruebas de que este tipo de “errores” no es por el efecto de la torpeza ni el de la ignorancia de la disciplina matemática, en la mayoría de los casos. Lo es en la medida en que la enfermedad didáctica es imputable a “errores de comportamiento”.

4. Utilización abusiva de la analogía

La analogía es un excelente medio heurístico cuando ella se utiliza bajo la responsabilidad de aquél que en realidad la utiliza, pero su utilización en la relación didáctica es un medio temible para producir efectos “Topaze”. Sin embargo, es una práctica natural si los alumnos han fracasado en su aprendizaje, por lo que es necesario darles una nueva posibilidad sobre el mismo tema. Ellos lo saben. Aun cuando el profesor disimula el hecho que el nuevo problema se parece al anterior, los alumnos, y es legítimo, tratarán de encontrar las semejanzas para aplicar (transponer) –completa- la solución que se les ha dado anteriormente.

Por ejemplo, cuando el profesor resuelve problemas “tipos”, el alumno exige que se le evalúe con problemas que el profesor ha resuelto, considerando solo el cambio de números o variables.

Para que los alumnos logren la construcción de los saberes matemáticos básicos, significativos y relevantes en sí mismos, o instrumentales, necesarios para adquirir otros y que están involucrados en tales aprendizajes, se requiere un proceso de enseñanza y aprendizaje planificado con criterio, adecuado a la realidad de cada grupo de alumnos, revisado y reajustado de manera continua.

Esta respuesta no significa que ellos la encuentren apropiada para la pregunta, sino que solamente ellos han reconocido índices (que pueden ser exógenos y no controlados) que el profesor entregó (consciente o no). El objetivo del profesor era que sus alumnos la produjeran, quienes obtienen la solución por una lectura de indicaciones didáctico metodológicos y no por acciones o búsqueda de estrategias destinadas a resolver.

Los alumnos se interesan en esos índices porque después de haber fracasado en unos cuantos problemas semejantes, a éstos no los habían identificado o reconocido. El profesor se apoyará en estas analogías, de repente enfatizadas, para reprochar al alumno su resistencia tenaz o a su falta de atención al estudio.

Esta actitud de los alumnos está relacionada con la devolución de la responsabilidad del aprendizaje que el profesor debe practicar y con el éxito que tienen muchos estudiantes en la asignatura de matemática, pero cuando cambia de profesor baja su rendimiento, ya que no puede “leer” los indicios o sugerencias didácticas metodológicas del nuevo profesor para acertar con la respuesta o la solución del problema.



TU EDAD CON CHOCOLATES

Haz los cálculos conforme vas leyendo el texto. ¡Asegúrate de no leer el final hasta haber hecho los cálculos! No vas a perder tu tiempo y te vas a divertir.



1. ¿Cuántas veces por semana te apetece comer chocolate?
(Debe ser un número entre más de 0 veces y menos de 10 veces)
2. Multiplica este número por 2 (para que sea par)
3. Súmale 5
4. Multiplica el resultado por 50, con calma opera correctamente a mano o utiliza una calculadora.
5. Si ya has cumplido años en el 2023 súmale 1773. Si aun no has cumplido tu cumpleaños este año súmale 1772.
6. Ahora al resultado, réstale el año en que naciste (número de cuatro dígitos).

El resultado es un número de tres dígitos:

El primer dígito es el número de veces que te apetece comer chocolate por semana.

Los dos números siguientes son: ¡¡ TUS AÑOS !! (¡ Si ! ¡ Tu edad !)

¿Por qué sucede esto?, ¿Puedes dar una explicación matemática?

¿SABES CONTAR?
SEGURO QUE CONTESTARÁS QUE SÍ,
¿ESTÁS SEGURO QUE SABES CONTAR?

La siguiente conversación puede suceder en alguna clase de Matemática, entre usted profesor(a) y cualquiera de sus alumnos.

Profesor: ¿Sabes contar?

Alumno: ¡Pues claro!

Profesor: Muy bien, entonces vamos a ver si realmente sabes contar. ¿Estás listo?

Alumno: Estoy listo.

Profesor: Un Ómnibus que iba de Cuzco a Sicuani comenzó su viaje con seis pasajeros. ¿Crees que podrás recordar eso?

Alumno: Por supuesto. No hay mucho que recordar.

Profesor: Muy bien, el hizo una parada y se bajaron dos pasajeros y subieron cuatro, ¿De acuerdo?

Alumno: Sí. De acuerdo.

Profesor: Luego el Ómnibus hizo otra parada y bajaron tres pasajeros. ¿Me sigues?

Alumno: Sí. Le sigo.

Profesor: El Ómnibus continuó el viaje e hizo otra parada, bajándose dos pasajeros y subiendo otros dos.

Alumno: ¡Eso es como si el Ómnibus no se hubiera parado!

Profesor: Desearía que no siguieras interrumpiéndome. ¡Me confundes!

Alumno: No he seguido interrumpiéndolo. He interrumpido sólo una vez, y hay que interrumpir al menos dos veces para poder decir que uno sigue interrumpiendo.

Profesor: Es verdad, pero yo soy quien pone el examen, niño, ¡no tú! Bueno, el Ómnibus continuó, hizo otra parada y se bajaron tres personas y se subieron cinco. ¿Sigues llevando la cuenta?

Alumno: Sí. La llevo.

Profesor: El Ómnibus llegó a Sicuani y se bajaron todos los pasajeros. ¿Cuántas veces paró el Ómnibus?

Alumno: ¡Pero si yo no estaba contando eso!

Profesor: ¿Ves?, entonces: ¡No sabes contar! ¡Nunca podrás aprobar un examen si no sabes contar!

Alumno: Pero si se contar. ¡Es que yo estaba contando lo que no era!

Profesor: Eso no es una excusa. Siempre hay que contar todo, porque toda cuenta.

CONTAR: EL NÚMERO NATURAL

a) *Dos situaciones clásicas*

Comencemos por describir dos situaciones culturalmente clásicas utilizadas para saber si un niño sabe contar.

Una práctica popular: la pequeña cuenta, escena familiar

Mamá: “¿Sabes abuelo?, ¡el pequeño ya sabe contar!

Abuelo: “¿Es verdad? A ver mi chiquito...

Mamá: “Enséñale al abuelo que ya sabes contar”

El niño (de 4 años): “Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, diez, quince, mmm”

Abuelo: (con admiración) “¡Ahhl!, muy bien, síguele así.

Una práctica profesional: “contar” así no cuenta

Sin embargo, dentro de la familia está la tía Mimi, que es una maestra jubilada.

Tía Mimi: “Claro que no abuelo, eso no significa que sepa contar. Para saber si el niño sabe contar hay que mostrarle algunos dedos y preguntarle cuántos son, luego pedirle que levante una cantidad de dedos. ¡No es suficiente con que recite la serie de los números! Y si no lo logra hacer bien, la mamá no debe decepcionarse. A los cuatro años, la mayoría de los niños apenas puede comprender los números hasta el 5. Los psicólogos lo dicen.

Mamá: ¡Pero si nuestra vecina Dorita, que tiene cinco años, cuenta perfectamente hasta el 70!

Tía Mimi: Seguramente también puede recitar el cuento de la caperucita roja que contiene más de 70 palabras⁵, pero cree que a los niños los trae la cigüeña. Esto no es grave, pero una colega me contó que los padres ejercen actualmente una fuerte presión para que los niños “sepan contar” precozmente. Ha visto que bajo la influencia de este “tira y afloja” algunos alumnos empiezan a contar cuando escuchan la palabra

⁵ N de T: Se refiere a series de palabras que los pequeños se pueden aprender de memoria, sin por ello comprender lo que éstas dicen, o cambiando su sentido. Ejemplos en el Perú tenemos muchos.

“número”, sin ni siquiera querer reflexionar sobre la pregunta que se les plantea. Tiene en su salón de inicial a niños chicos y medianos que cuentan mecánicamente más allá del 50, y por ello no puede, ni con éstos ni con los que no cuentan más allá de cinco, organizar colectivamente ninguna actividad matemática de su edad.

b) *Análisis y construcción de modelos*

1. El modelo del segundo ejemplo contiene y corrige evidentemente al primero.

En los dos casos la formulación de los números es un medio apropiado para responder a lo que se pide, pero la Tía Mimí modifica el modelo inicial (maestro, alumno, saber) de manera esencial y lo sustituye por otro (maestro, alumno saber, medio), en el que el medio objetivo es el número de dedos que se muestran o se cuentan. Así, en su relación con el medio, el niño debe sujetar su respuesta a una nueva forma de validez que no es únicamente la que espera o desea un adulto.

Esta sujeción proporciona evidentemente otro sentido al saber, el cual se convierte en el medio adecuado para responder a las necesidades de una situación objetiva, desprovista en sí misma de intencionalidad didáctica. Sin embargo, nótese que el niño no tiene los medios para comprender la pregunta “cuántos”, ni para responder en caso de que no haya aprendido previamente el sentido en juego. Además, no tiene los medios para verificar por sí mismo la validez de su respuesta. El juicio de su adecuación queda bajo el control del maestro. Esta situación es pues esencialmente una situación de evaluación de los conocimientos.

Esta situación sólo puede utilizarse para la enseñanza en un marco de una didáctica conductista, que consiste en repetir las preguntas, en enseñar cómo se establece la respuesta y en hacer reproducir las técnicas de conteo en asociaciones pregunta-respuesta hasta lograr una reproducción perfecta.

2. En relación con esto, en uno de sus dispositivos más célebres, Piaget pregunta a los niños “¿dónde hay más fichas?” presentando dos colecciones

equipotentes, que ocupan más o menos espacio. Esta situación siempre provoca la misma crítica por parte de los que la conocen por primera vez: la pregunta es ambigua, es necesario conocer el número para comprender que se trata del número y no del espacio ocupado. De hecho, las preguntas de evaluación siempre son tales que hace falta conocer la respuesta para comprender la pregunta.

En una situación “de aprendizaje” en la que el alumno debería “adaptarse a una situación objetiva” (y no a una relación dual con el maestro), produciendo él mismo el conocimiento, es necesario que la consigna o el proyecto de acción pueda ser concebido por el sujeto mismo sin el auxilio de su solución, puesto que se trata de construir o de adquirir.

Para comprender la situación, el alumno debe poder esbozar, con sus conocimientos actuales, una estrategia de base que corresponda a la consigna que se le dio. El conocimiento nuevo es entonces el medio para producir el efecto esperado mediante una estrategia más eficaz, más segura, más económica, etc. Los conocimientos están en competencia y los motivos de aprendizaje son leyes “económicas” que se manifiestan al alumno mismo.

3. El aprendizaje “behaviorista” apela a un sentido, pero este sentido es exterior al proceso de adaptación. Por este hecho, es el maestro el que debe decidir lo que va a considerar como un aprendizaje elemental. Si un conocimiento es muy complejo, lo deberá descomponer, enseñar sus partes y enseñar después la composición de dichos conocimientos fragmentados. Las razones de este recorte son ajenas al niño y el sentido de lo que ha aprendido no le podrá ser dado sino después, a través del uso. Esto explica la necesidad de multiplicar los ejercicios de aplicación de un saber aprendido. El sentido de este saber estará representado, no por su adecuación al establecimiento de respuestas, sino por un universo de situaciones determinado por sus analogías. Así, por

ejemplo, la enseñanza clásica de la división separa el aprendizaje del algoritmo, del aprendizaje de su sentido.

4. Hipótesis de la situación fundamental. La vía empírica consiste en intentar mejorar estas prácticas. Nosotros, por el contrario, vamos a seguir el otro camino, aquel que partiendo de un conocimiento determinado, busca qué tipo de situaciones son capaces de propiciar su aparición, su utilización, su construcción y su aprendizaje.

Por razones heurísticas, suponemos que *cada conocimiento matemático posee al menos una situación que lo caracteriza y lo diferencia de los otros.*

Además, conjeturamos que el conjunto de situaciones que caracterizan a una misma noción está estructurado y puede ser engendrado a partir de un pequeño número de situaciones llamadas fundamentales, a través de un juego de variantes, de variables y de cotas sobre estas variables.

Una situación fundamental no es a priori una situación “ideal” para la enseñanza, ni siquiera una solución más eficaz. El valor de una situación para su uso didáctico se aprecia en función de un gran número de otros parámetros externos, tales como la posibilidad efectiva de ponerlos a disposición en un ambiente psico-socio-cultural determinado.

c) La situación fundamental del conteo⁶

Para satisfacer las condiciones anteriores y utilizando algunas conclusiones de la teoría, se obtiene la situación siguiente que puede traducirse en instrucciones adaptadas para niños de 3 a 7 años:

⁶ N de T. En sus trabajos sobre la noción de número natural, BROUSSEAU distingue la enumeración en el sentido de listado (“*énumération*”), de la asociación de los objetos de la lista con la serie de los números (“*comptage*”) y finalmente de la determinación del cardinal de un conjunto (ya sea por medio de un conteo, de una correspondencia uno a uno o de otra manera) (“*dénombrement*.”). Debido a que en este texto de carácter general esta distinción no es muy importante, hemos decidido, en acuerdo con el autor, traducir “*dénombrement*” por “conteo” entendiendo por éste además de la asociación de cada número de la serie con un objeto, la determinación final del cardinal.

“Tenemos pinturas en estos botes. Tú vas a ir allá a buscar los pinceles y vas meter uno solo en cada bote. Debes traer todos los pinceles en un solo viaje y es importante que ningún pincel se quede sin bote y ningún bote se quede sin pincel. Si te equivocas, tomas todos los pinceles, te los llevas otra vez y lo intentas de nuevo. *Sabrás contar cuando puedas hacerlo, incluso cuando haya muchos botes y muchos pinceles*”.

Esta situación engloba a la anterior en el sentido de que, en cuanto el número de botes se vuelve suficientemente grande, el alumno debe disponer de un recurso material para representar la colección (dibujo, listado, con sus dedos o de otra manera), o bien debe contarla organizando su listado. El número no es más *el objeto* explícito de la pregunta, sino el *medio* implícito para responder a ella.

Para que el número aparezca explícitamente, es necesario transformar esta auto comunicación en una comunicación verdadera:

“Debes quedarte cerca de los botes de pintura, y decir o escribir un mensaje para que tu compañero pueda traerte los pinceles que quieres. Si te trae demasiados pinceles o le faltan, entonces los dos pierden. *Sabrán contar cuando puedan hacerlo, incluso cuando haya muchos botes y muchos pinceles*”.

El niño sabrá contar cuando pueda jugar los dos roles: *pedir* (emisor) a alguien (receptor), oralmente o por escrito, la cantidad de pinceles necesarios verificando la operación y, al contrario, *proveer* la petición de una cantidad deseada.⁷

Los recursos para resolver este problema van a evolucionar, en particular con el tamaño de las colecciones y con la forma en que éstas se presenten. El conocimiento de los

⁷ Esta situación parece presentar un carácter fundamental porque “todas” las situaciones de conteo pueden deducirse con sólo variar sus variables cognitivas (naturaleza, movilidad de los objetos, circunstancias, tamaño de los conjuntos, etc.) y porque todas las prácticas de conteo y de aprendizaje del conteo pueden también ser clasificadas y comparadas desde el punto de vista didáctico. Las dos prácticas habituales anteriores se obtienen a partir de la situación fundamental, suprimiendo o transfiriendo al adulto algunas tareas. En la primera situación, que podemos llamar por ejemplo **“el conteo popular”**, el alumno reproduce una serie de palabras bajo el control del adulto. La segunda, **“el conteo escolar clásico”** es más evolucionada, al niño le toca hacer corresponder un número a un conjunto de botes de pinturas (trabajo de emisor), o le toca constituir un conjunto a partir de un número dado de pinceles.

números pequeños se enriquecerá aún más cuando sirvan para construir otros con la ayuda de diversas operaciones. Es necesario observar que, si bien los niños adquieren rápidamente ciertos esquemas verdaderos para cualquier número, la posibilidad efectiva de tomar a estos esquemas como objetos de conocimiento y de tratarlos como saberes no se adquiere ni espontánea ni rápidamente. Será necesario, además, tarde o temprano, no conformarse con su utilización, sino también dilucidar, formular y discutir sus propiedades y sus estructuras numéricas. Estas dilucidaciones son necesarias para el aprendizaje mismo y deben acompañarlo. ¿Cuándo y cómo? El conocimiento del número no puede reducirse al de los axiomas de Peano.

d) *El sentido de los conteos*

La situación anterior es propuesta a niños en curso de aprendizaje (clásico) que ya saben asociar la serie de números a cada objeto de una colección, y en ese sentido “saben” resolver el problema del emisor y el del receptor (digamos hasta 30), pero que todavía no dominan el conteo (no asocian necesariamente el último pronunciado con el cardinal del conjunto). Puede entonces observarse a veces un comportamiento como el siguiente.

El alumno va a buscar un puñado de pinceles y los distribuye en los botes.

“Abh, ¡quedan tres!”

“¿Lo lograste?”

“No, porque me quedan tres”

“Bueno, recógelos todos e inténtalo otra vez”

Los demás alumnos de la clase le sugieren:

- “¡Cuenta, cuenta!”

El alumno cuenta los botes, se vuelve a ir, toma un puño de pinceles y regresa. El hecho de haber contado no le sirvió de nada. Los demás alumnos le siguen ayudando:

- “¡No! ¡no! Debes contar los pinceles”

El niño se vuelve a ir, cuenta todos los pinceles que hay, toma algunos y regresa...

e) *Una condición suplementaria: la confianza en sus métodos*

¿Podemos afirmar que el alumno sabe contar cuando es capaz de conformar colecciones adecuadas de cualquier cantidad en las condiciones de la situación fundamental? No del todo: debe ser también capaz de estar suficientemente seguro de su conteo para identificar las fuentes de error y en caso dado para discutir las.

Por ejemplo, si en el momento en el que el niño se va a buscar los pinceles alguien le esconde un bote, deberá ser capaz de comprender y de decir “¡Me hiciste trampa!”.

Esta confianza en sus métodos exige a su vez una posición reflexiva con respecto a ellos, es decir, un “metaconocimiento”, también exige palabras para expresar los conocimientos adquiridos, un metalenguaje, y finalmente todo aquello que constituye la conversión de ciertos conocimientos en saberes. Así, nuestra situación de conteo no era del todo fundamental. ¿Lo es ahora?

Con respecto a los métodos clásicos, esta situación fundamental de conteo puede revelarse útil en diversos momentos del aprendizaje y sobre todo para indicar a los profesores lo que quiere decir “contar” en términos “concretos”.

Esto no quiere decir que el aprendizaje a través del uso exclusivo de la situación fundamental sería más rápido o más eficaz, éste podría incluso demostrarse innecesariamente pesado cuando el alumno ha comprendido el objetivo del aprendizaje.

f) *La organización de procesos genéticos largos*

¿Cómo se organiza la adquisición de una estructura matemática compleja como la de los números naturales? Se requieren evidentemente procesos largos. ¿Cómo se articulan los conocimientos adquiridos en un primer momento con aquellos que se adquieren después?

Aprender las prácticas parciales del conteo de manera separada, implica que el adulto las enseña, las exige, las corrige, las hace imitar y repetir y después las integra. En ningún momento el niño está en condiciones para establecer por sí mismo la finalidad de la

acción y para corregir sus errores. Sin embargo, padres y maestros utilizan con cierto éxito todas estas formas degeneradas de la situación fundamental, incluso el caso extremo del aprendizaje formal de la serie de los números.

Posiblemente no se trata tanto de rechazar algunas de estas formas como de utilizarlas mejor en función de sus características particulares.

Las principales desventajas de los aprendizajes parciales son las siguientes:

No permiten transferir al niño la responsabilidad del juicio sobre el valor de sus respuestas, ni describirle de antemano un proyecto de aprendizaje del cual él podría evaluar los progresos.

Es necesario que ya haya aprendido la respuesta, de una manera o de otra, para que comprenda lo que se le está pidiendo.

La teoría de las situaciones permite estudiar las soluciones que ya existen y proponer otras, en particular sustituyendo las técnicas parciales en una génesis global inteligible.

g) Aprender los números

El ejemplo anterior deja de lado la diversidad de situaciones necesarias para el conjunto del proceso, la complejidad de las relaciones con el saber y un gran número de fenómenos: será necesario que el alumno *enumere*⁸ las colecciones (que pase o nombre uno tras otro todos los objetos sin pasar dos veces el mismo), al mismo tiempo que las *pone en correspondencia* con otra colección, y que *evalúe su cardinal* mediante esta correspondencia, particularmente cuando las *cuenta* (cuando ponga en correspondencia sus elementos con las palabras), y después, si el conteo fue descompuesto, cuando *nombre* el resultado de su conteo (expresando el número oralmente mediante un sistema de numeración) y finalmente cuando *escriba* el número. Será necesario también que se apropie de los usos *ordinales* de la serie de números, etc.

⁸ Enumerar en el sentido de “hacer un listado”. Para mayor información acerca del proceso de “enumerar” se puede consultar la tesis de J. BRIAND (1993) *L'énumération dans le mesurage des collections*.

La denominación y la escritura de los primeros números se basa en procedimientos de *numeración* que deben ser reconocidos para ser utilizados, pero cuyo estudio y cuyo análisis deben continuar a todo lo largo de la escolaridad básica, por lo menos para conocer y utilizar nuevos números. El análisis de la criptografía numérica y de los sistemas de numeración, opuestos a la práctica del *numeral*, y especialmente a la lectura de *números*, es indispensable.





2.1. Teoría de campos conceptuales

Gérard Vergnaud, director de investigación del Centro Nacional de Investigación Científica (CNRS) de Francia y discípulo de Piaget, amplía y redirecciona en su teoría el enfoque piagetano de las operaciones lógicas generales y de las estructuras generales del pensamiento para el estudio del funcionamiento cognitivo del “sujeto en situación”. A diferencia de Piaget, toma como referencia el propio contenido del conocimiento y el análisis conceptual del dominio de ese conocimiento.

Campo conceptual es, para él, el conjunto informal y heterogéneo de problemas, situaciones, conceptos, relaciones, estructuras, contenidos y operaciones del pensamiento, conectados unos a otros y, probablemente, entrelazados durante el proceso de adquisición. El dominio de un campo conceptual no ocurre en algunos meses, ni tampoco en algunos años. La teoría de los campos conceptuales es una teoría cognitiva neopiagetiana que pretende ofrecer un referencial más fructífero que el piagetiano para el estudio del desarrollo cognitivo y del aprendizaje de competencias complejas.

Tres argumentos principales llevaron a Vergnaud al concepto de campo conceptual: 1) Un concepto no se forma dentro de un solo tipo de situaciones. 2) Una situación no se analiza con un solo concepto. 3) La construcción y apropiación de todas las propiedades de un concepto o de todos los aspectos de una situación es un proceso de largo aliento que se extiende a lo largo de los años, a veces de una decena de años, con analogías y mal atendidos entre situaciones, entre conceptos entre procedimientos y entre significantes.

El enfoque de Gérard Vergnaud, intenta hacer operatoria la definición de concepto. Para él, un concepto es un triple (S, I, s) .

S: Es el conjunto de situaciones que dan sentido al concepto. Cada elemento de S es una concretización del concepto, uno de sus representantes.

- I:** Es el conjunto de los invariantes operatorios del concepto, el conjunto de las propiedades que son comunes a los elementos de S y que hacen que se agrupen todos en una misma categoría conceptual.
- s:** Es el conjunto de términos, de denominaciones o de símbolos que designan el concepto.

Por ejemplo, el concepto de función en matemáticas comprende el conjunto de las funciones que el sujeto que aprende en su nivel podrá caracterizar como tales, es decir, las cualidades que hacen que una relación entre conjuntos sea una función (correspondencia, univocidad), las palabras y los símbolos que representan habitualmente a una función.

Un concepto tendrá existencia solamente en relación a otros conceptos si es susceptible de ser aplicado a la explicación y a la previsión, es decir, que debería insertarse en el modelo de una cierta realidad progresivamente construida y compleja.

Por ejemplo, el concepto de función no será operatorio a menos que permita reconocer objetos matemáticos que no son funciones, y si permite considerar una función como uno de los objetos representativos de este concepto, el acceso a este nivel conceptual es largo y lleno de obstáculos epistemológicos y didácticos. Se cree que los estudiantes que entran a la Universidad en general no lo han asimilado completamente.

Estas observaciones han llevado a Gérard Vegnaud a desarrollar la noción de campos conceptuales (*Teoría de campos conceptuales* RDM 1991. Vol. 10 N° 2.3), cuya construcción en los distintos niveles de escolaridad es el verdadero desafío del aprendizaje.

Un concepto no recibirá su estatus abstracto a menos que sea desprendido efectivamente del contexto en que ha sido presentado. Es necesario entonces proponer ejemplos que pongan en juego los mismos conceptos, en situaciones diferentes, y si es posible en campos conceptuales diferentes.

Los conceptos matemáticos se dotan de significado a partir de una variedad de situaciones, cada situación no puede ser analizada usualmente con la ayuda de un solo

concepto, sino que precisa varios de ellos. Esta es la razón que ha llevado a Vergnaud (1990) al estudio de la enseñanza y aprendizaje de campos conceptuales, esto es, grandes conjuntos de situaciones cuyo análisis y tratamiento requiere varios tipos de conceptos, procedimientos y representaciones simbólicas que están conectadas unas con otras. Como ejemplos de tales campos conceptuales pueden citarse las estructuras aditivas, estructuras multiplicativas, la lógica de clases y el álgebra elemental.

Y como son las situaciones que dan sentido a los conceptos, es natural definir campo conceptual, sobre todo, como conjunto de situaciones, un concepto se torna significativo a través de una variedad de situaciones, pero el sentido no está en las situaciones en sí mismas, así como no está en las palabras ni en los símbolos. El sentido es una relación del sujeto con situaciones y significantes, pero precisamente, son los *esquemas*, por ejemplo, las acciones y su organización, evocados en el sujeto por una situación o por un significante que constituyen el sentido de esa situación o de ese significante para ese individuo. Vergnaud considera que los esquemas necesariamente se refieren a situaciones, a tal punto que debería hablarse de interacción esquema-situación en lugar de interacción sujeto-objeto. Los esquemas tienen como ingredientes esenciales los ***invariantes operatorios*** como son los *conceptos-en-acción* y los *teoremas-en-acción* que constituyen la parte conceptual de los esquemas, es decir, los conocimientos contenidos en los esquemas.

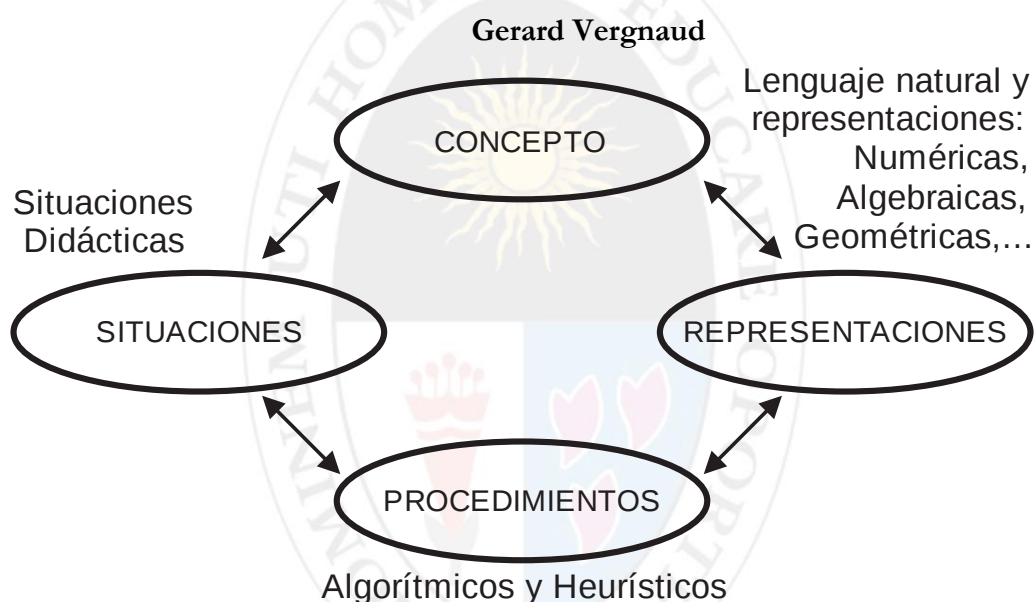
Teorema-en-acción es una proposición considerada como verdadera sobre lo real. *Concepto-en-acción* es una categoría de pensamiento tenida como pertinente, y ese conocimiento es principalmente implícito y el estudiante tiene dificultades en explicarlo o expresarlo, pero eso no significa que tal conocimiento no pueda ser explicitado. Es a través del proceso de explicitación del conocimiento implícito –ahí el profesor tiene un rol de director de estudio fundamental– que los teoremas-en-acción y conceptos-en-acción pueden tornarse verdaderos teoremas y conceptos científicos. Una proposición explícita puede ser debatida, una proposición tenida como verdadera de manera totalmente implícita no, así el carácter del conocimiento cambia si es comunicable,

debatido y compartido (esto correspondería a la fase de validación de la teoría de situaciones didácticas de Brousseau).

AXIOMA DE LUNDFOR

“En matemáticas, ser un experto consiste en saber cada vez más sobre menos cosas”.

ESQUEMA DE LA TEORÍA DE CAMPOS CONCEPTUALES



Estos cuatro aspectos o componentes de la teoría de campos conceptuales, son considerados en el ámbito internacional como un marco teórico en diversas investigaciones en enseñanza de las ciencias, así como en las propuestas de reformas curriculares de diferentes países y en la formación continua de docentes, por lo que, en nuestra opinión, estos conocimientos deben ser estudiados desde el nivel de pregrado a los futuros docentes de la especialidad de matemática.

El comprender esta teoría, explica al docente en qué aspecto estaría fallando en su rol dentro del aula. Se podría responder, por ejemplo: “¿La matemática se hace o se descubre?” Al parecer, se enseña cómo funciona no por qué funciona. Hasta qué punto es recomendable: “Decir la verdad, siempre la verdad, pero no toda la verdad”. ¿Si no

fuera por la fe? “Privar a los conceptos de sus significados es conservar la cáscara y arrojar la fruta”. “¿Es siempre el profesor responsable del aprendizaje?”

Los conceptos

Como Vergnaud operativiza la definición de concepto, mejor sería preguntarse: ¿Cuál es e concepto de concepto? Una idea podría ser: “Son las regularidades diversas y distintas que son enriquecidas por diferenciación progresiva y recontextualización integrativa”. El concepto se desarrolla no se aprende.

Las representaciones

Cuando está justificado y cuidadosamente elegida, la notación contribuye a la clarificación de los conceptos y relaciones esenciales de la matemática y ahorra trabajo en las operaciones; también ayuda en la comprensión de las ideas. Por ejemplo: expresar en palabras: $x^2 + 2xy + y^2$ no solo resultaría más largo sino más difícil de comprender.

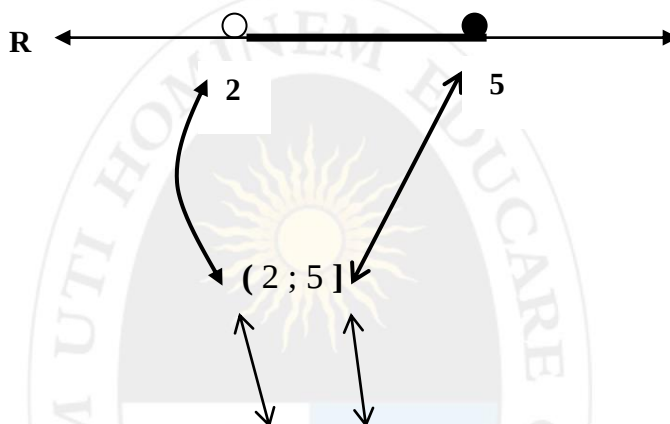
Jean Piaget estudió los diferentes estadios de la mente humana, particularmente en como los niños entienden los fenómenos naturales y psíquicos, propuso en función de su investigación, que los grados de representación estaban relacionados con la inteligencia y que estaba ligada a la madurez alcanzada por el niño. Piaget creía que existían esquemas mentales (*schemas*) y el más importante era el pensamiento. Afirmaba que la escritura era algo secundario solo para expresar un pensamiento, es decir, que existen representaciones mentales, imágenes y concepciones que puede tener un individuo sobre un objeto. Al respecto, algunos investigadores sugieren que la información se almacena en forma de proposiciones, es decir que generalmente recordamos las ideas, pero no necesariamente las palabras exactas que se utilizaron para comunicar la información.

Nosotros seguiremos la teoría planteada por Raymond Duval, en la que las representaciones semióticas, como conjunto de signos y lenguaje, son medios de representaciones mentales para hacerlas visibles a otro individuo. Para Duval, la

semiosis es la producción de una representación semiótica, mientras que la **noesis**, es la actividad cognitiva del pensamiento, como la comprensión de un concepto.

Podemos decir entonces, que las representaciones semióticas son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática más allá de los fines de comunicación.

¿Cómo se representa, mejor un intervalo, de una manera gráfica, numérica o algebraica?



¿En qué tipo de representación semiótica se comprende mejor el concepto de “abierto” y “cerrado”? ¿El profesor en su enseñanza, hace una coordinación entre estas tres clases de representaciones?

En un famoso artículo publicado en 1993, Raymond Duval evidenciaba el siguiente hecho: el estudiante puede confundir el objeto matemático O , que está tratando de construir cognitivamente, con una determinada representación semiótica $R(O)$ de dicho objeto; y explicaba que esta confusión se debía a una especie de paradoja inevitable: sólo quien ha construido el objeto O , puede reconocer $R(O)$ como representación de O y no como objeto en sí.

Raymond Duval enunciaba su famosa **paradoja cognitiva** del pensamiento matemático, la cual tuvo una fuerte repercusión: (...) de un parte, el aprendizaje de los objetos matemáticos sólo puede ser un aprendizaje conceptual y, de otra parte, es sólo a través de representaciones semióticas que es posible una actividad sobre los objetos matemáticos. Esta paradoja puede constituir un verdadero círculo vicioso para el aprendizaje. ¿Cómo, sujetos en fase de aprendizaje, podrían no confundir los objetos

matemáticos con sus representaciones semióticas si ellos únicamente pueden tener relación con las representaciones semióticas? La imposibilidad de un acceso directo a los objetos matemáticos, más allá de cualquier representación semiótica, hace la confusión casi inevitable. Y, por el contrario, ¿cómo pueden los estudiantes adquirir el dominio de los tratamientos matemáticos, necesariamente ligados a las representaciones semióticas, si no tienen el dominio conceptual de los objetos representados? Esta paradoja es aún más fuerte si se identifica actividad matemática con actividad conceptual y si se consideran las representaciones semióticas como secundarias o extrínsecas. Duval, explica cómo debe entenderse la paradoja cognitiva: el docente propone al estudiante representaciones semióticas de un objeto matemático con la intención que el estudiante lo construya cognitivamente; pero lo único que puede hacer es proponerles representaciones semióticas dado que no existe forma alguna de mostrar, indicar (en el sentido etimológico de la palabra) dicho objeto; el estudiante entra, por tanto, concretamente en contacto con representaciones, no con el objeto, aprende a hacer referencia a dichas representaciones, no al objeto, y a manipularlas. Parecería un itinerario destinado al fracaso cognitivo. Y, por el contrario, el estudiante, al final, aprende, construye, hace propio el objeto, en una situación que tiene mucho de paradójica y que es de gran interés estudiar siempre más en profundidad.

Procedimientos

Los procedimientos heurísticos

La heurística tenía por objeto el estudio de las reglas y de los métodos de descubrimiento y de la invención. La heurística moderna, inaugurada por George Polya con la publicación de su obra *How to solve it* (Polya, 1945), trata de comprender el método que conduce a la solución de problemas, en particular las operaciones típicamente útiles en este proceso. Este importante tema tendrá un tratamiento especial posteriormente.

Las *heurísticas* son las operaciones mentales típicamente útiles en la resolución de problemas, son reglas o modos de comportamiento que favorecen el éxito en el proceso

de resolución, así como sugerencias generales que ayudan al individuo o grupo a comprender mejor el problema y a realizar progresos hacia su solución.

La heurística es el arte de inventar, crear o descubrir

“Una estrategia cognitiva es una heurística o una guía que sirve de apoyo al alumno para que desarrolle procesos internos que lo capaciten para el desempeño de operaciones de alto nivel”; “..., constituye una buena apuesta, un procedimiento que creemos nos ofrece una probabilidad razonable de solución a un problema, o al menos, acercarnos a tal solución”.

Los Procedimientos algorítmicos

En un enfoque algorítmico interesa realizar una transmisión eficiente del conocimiento que el docente o diseñador considera que el alumno debe aprender, asimismo, el alumno debe asimilar al máximo las enseñanzas del docente, convirtiéndose en depositario de sus conocimientos y modelos de pensamiento. Puede decirse que bajo este enfoque se da una educación “controlada por el diseñador”, quien decide qué, para qué y por qué enseñar y establece cómo, dónde y con qué nivel. El contenido está organizado en secuencias predeterminadas y es considerado un enfoque pasivo.

¿Por qué no sumar o multiplicar de izquierda a derecha?

$$\begin{array}{r}
 5 \quad 8 \quad 4 \quad + \\
 2 \quad 6 \quad 3 \\
 \hline
 7 \quad 14 \quad 7 \\
 8 \quad 4 \quad 7
 \end{array}$$

El reparto de pasteles.⁹

Problema: Se dispone de 4 pasteles y se le quiere dar a cada niño $\frac{3}{5}$ de pastel.

¿A cuántos niños se les dará pastel? ¿Cuánto sobra?

⁹Problema planteado en el curso para la acreditación de tutores del plan de formación permanente on line para el profesorado de Secundaria en el área de Matemáticas. CAEI. OEI 2010

La resolución puede hacerse de dos maneras:

<i>Primer Procedimiento</i>	<i>Segundo Procedimiento</i>
<i>i) $4 = 20/5$; $20/5 : 3/5 = 6$ sobrando $2/5$</i>	<i>ii) $4 : 3/5 = 20/3 = 6 + 2/3$</i>

Las respuestas posibles según estas operaciones aparentemente son distintas:

i) 6 niños y sobran $2/5$

ii) 6 niños y sobran $2/3$

Analizar el problema, los dos procedimientos, los resultados de cada uno de ellos y justifica cuál es correcta y cuál es falsa.

Es muy frecuente que las respuestas iniciales de los estudiantes (y profesores), sean: “*las dos respuestas son correctas*”. Frente a ello, se puede recordar que en ambas respuestas se están dando restos diferentes, o que la división racional no tiene resto, pero en lo que debemos fijarnos es en los argumentos que las explican y darle más importancia a los elementos que se ponen en juego en su análisis, lo que es más propio de la comunicación entre estudiantes y profesores. Estudiando sus respuestas veíamos que estaban queriendo reflejar que $2/3$ y $2/5$ estaban relacionadas, ya que $2/5$ es un trozo de pastel, mientras que los $2/3$ se referían a la porción que recibe cada niño, y por tanto es $2/3$ de $3/5$, lo que equivale a $2/5$ de pastel. Se debe destacar que hayan apreciado la importancia de la unidad a la que se refiere cada fracción y de conocer qué representa cada dato de una división (entera o racional).

Algunas respuestas que dan los docentes son:

- Reflexión matemática sobre el concepto de división, distinción entre división entera y división racional y la viabilidad de cada una de ellas según el conjunto numérico en que estemos.
- Análisis del significado de las fracciones en el problema, identificación de a qué se refieren cada una de ellas para examinar lo que expresan en cada resolución.

- Importancia de la referencia a la unidad en las fracciones (especialmente cuando las fracciones tienen un sentido de referencia a un todo), y su influencia en este problema (relacionado con el comentario anterior)
- Significado de los números racionales, que podríamos convertir en naturales estableciendo como unidad de referencia la más pequeña de las porciones utilizadas. Análisis que nos llevaría a estudiar la pertinencia de los racionales, dada la imposibilidad de establecer esta situación que fuera válido para cualquier problema. (¿se podría continuar el análisis hasta distinguir lo continuo asociado a los racionales, de lo discreto, asociado a los naturales? ¿a la densidad? ¿y a la numerabilidad?)
- Reflexión sobre los signos empleados para indicar la división, estos signos tampoco son universales. En otros casos aparece un signo formado por dos puntos y una rayita en medio. Conocer todos los signos matemáticos y sus orígenes es un tema interesante para un profesor de Matemáticas.
- Profundizar en conceptos matemáticos que parecen fáciles cuando los tratamos de manera mecánica, pero que debemos aclarar para dominar mejor. Con estas reflexiones podemos ampliar el abanico de aspectos que afectan a la comprensión de los problemas de fracciones (en este caso), con lo que podemos estudiar si es conveniente o no utilizar un material manipulativo para aclararlos.
- La diferenciación fenomenológica entre fracción y racional es un campo nuevo que se presta a continuar el debate. En algunos libros y autores se ha distinguido entre "fraccionar" y "fracción". El primero corresponde a la "acción", que se puede ligar a la idea de fracción operador (a/b de q es dividir q en b partes y tomar a).
- Yo creo que la diferencia entre los significados de fracción, en fracción "relación parte-todo", "cociente", "medida", "operador" y "razón", supone un avance más interesante. Creo que lo más importante es destacar en qué casos la fracción se refiere a una unidad y en qué casos es una proporción y no está clara la idea de unidad.

- El número racional abarca todas estas utilizaciones de fracción, por lo que distinguir el empleo de la fracción del empleo del número racional es difícil, ya que uno abarca al otro.

Situaciones

El contexto en una situación determina el significado en casi todos los casos, por ejemplo, el 2 en 245 y 425 tienen significados distintos, pero esto al parecer no provoca ninguna confusión.

Una situación didáctica, como se estudiará más adelante, es el conjunto de relaciones establecidas explícita o implícitamente entre el alumno, un cierto medio -otros alumnos, eventualmente instrumentos u otros objetos- y un profesor con el fin de hacer que el alumno se apropie de un saber constituido o en vías de construcción.

Situación problemática

Para que el alumno "construya" el conocimiento, es necesario que se interese personalmente por la resolución del problema planteado en la situación didáctica. En este caso se dice que se ha conseguido la devolución de la situación al alumno.

Al respecto, Polya, afirma que “tener un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido, pero no alcanzable de forma inmediata”.

Un problema es una situación, cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo o un grupo, que requiere solución, y para la cual no se vislumbra un medio o camino aparente y obvio que conduzca a la misma (Krulik y Rudnik, 1980).

Cuanto más precisas sean las respuestas a las preguntas:

¿Qué estoy haciendo?

¿Por qué lo hago?

¿Para qué lo hago?

¿Cómo lo usaré después?

Mejor será el control global que se tenga sobre el problema y sobre las decisiones que conducen a su solución.

Procedimiento “erróneo” y situación:

Tratemos un ejemplo práctico acerca de procedimientos “erróneos”, pero válidos, en la suma de fracciones o de razones: ¿Cuántas veces nuestros alumnos suman de la siguiente manera?:

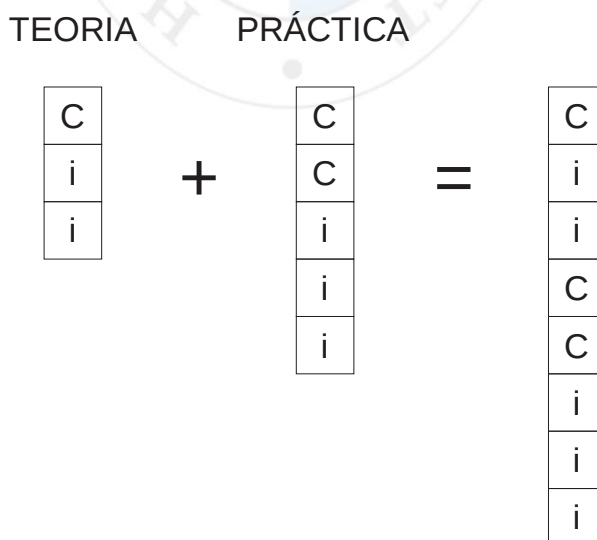
$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{1+2}{3+5} = \frac{3}{8}$$

¿Esta suma es incorrecta?, ¿es que esta manera de “sumar” no sirve para resolver algún tipo de situación?

Consideremos la siguiente situación: un examen de matemática tiene 3 preguntas de teoría y 5 de práctica, en total el examen consta de 8 preguntas.

Un estudiante obtiene el siguiente resultado: en teoría responde 1 pregunta correcta y 2 incorrectas, en práctica 2 correctas y 3 incorrectas, de este modo el número de respuestas correctas en total en la asignatura de matemática son 3, y de respuestas incorrectas son 5.

Gráficamente:



Esto lo podemos representar, numéricamente:

En teoría obtuvo 1 respuesta correcta de 3 preguntas, es decir: $1/3$

En práctica obtuvo 2 respuestas correctas de 5 preguntas, es decir: $2/5$;

En total obtuvo 3 respuestas correctas de 8 preguntas, es decir: $3/8$; ¿de acuerdo?

Es decir:

Se puede afirmar que para obtener $3/8$ se realizó este procedimiento u “operación”:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{1+2}{3+5} = \frac{3}{8}$$

¿Es este procedimiento válido? ¿Por qué?

Si hacemos la suma “habitual” de fracciones, obtenemos un resultado incoherente con la situación planteada:

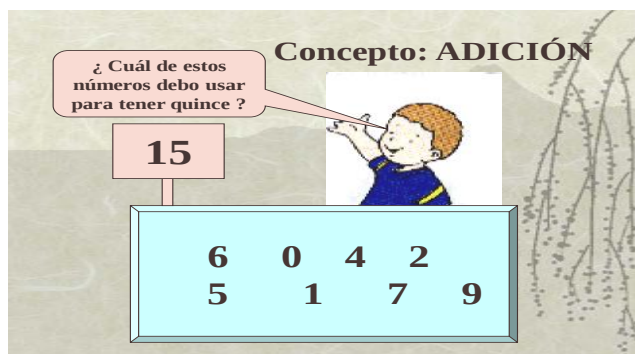
$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{5+6}{15} = \frac{11}{15}$$

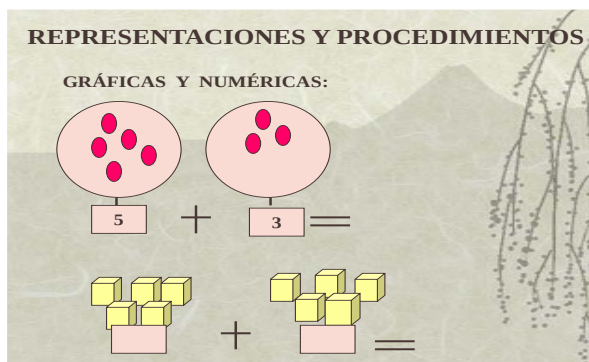
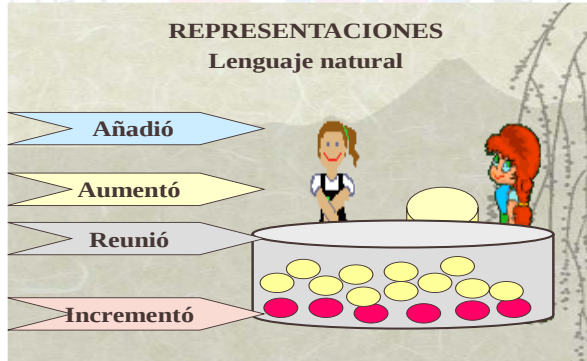
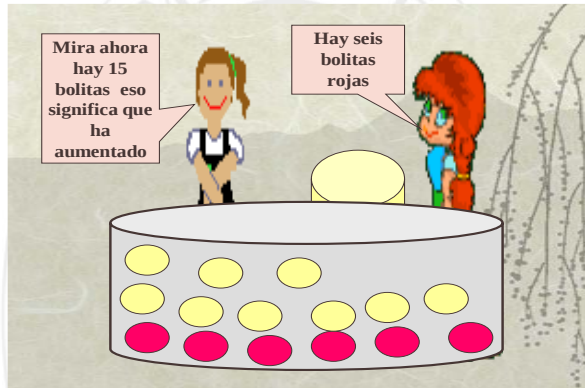
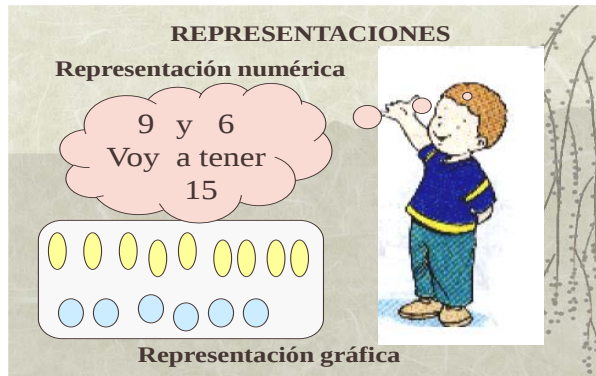
La “suma” de fracciones procediendo de manera “incorrecta”, sumando numeradores y sumando denominadores ¿es siempre incorrecta?

Ejemplo: producto de un grupo de docentes del nivel de educación primaria, del concepto de adición desde la perspectiva de la teoría de campos conceptuales:

“No hay problemas resueltos, solo hay problemas que están más o menos resueltos. Las matemáticas serán tan correctas como los seres humanos y los humanos somos falibles”.

Poincaré





REPRESENTACIÓN NUMERAL

$$\begin{array}{r} 23 + \quad 123 + \quad 5\,678 + \\ \hline 33 \quad 233 \quad 1\,345 \end{array}$$

REPRESENTACIÓN ALGEBRAICA

A	B	C	D
2 345	3 305	54	1 453
E	F	G	H
6 450	5	357	246
I	J	K	L
3 346	673	5 789	24 34

$A + B + C + L =$

REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA

3 456	45	345
1 323	2 896	35
4	4 563	5 893

Diagrama de bloques de adición:

- Un bloque amarillo con $\boxed{} + \boxed{}$
- Un bloque cian con $\boxed{} + \boxed{} + \boxed{}$
- Un bloque azul con $\boxed{} + \boxed{}$

REPRESENTACIÓN VERBAL

Expresión verbal	Expresión matemática
El doble de un número , más 7	$2X + 7$
El doble de un número aumentado en 7	$2(X + 7)$
Hallar la suma de trece mil ochocientos veinte y nueve mil quince	$13\,820 + 9\,015$

PARTES DE LA ADICIÓN

$$\begin{array}{r} \text{SUMANDO} \rightarrow 234 + \\ \text{SUMANDO} \rightarrow 456 \\ \hline 690 \leftarrow \text{SUMA} \end{array}$$

SITUACIÓN DIDÁCTICA

Para el aprendizaje en el tercer ciclo (1º y 2º grado)

El alumno debe tener una bolsa de plástico y se le indica que debe colocar en ella, tres chapas, luego se le pide que camine entre sus compañeros y al sonido del pito debe caminar y sus compañeros irán agregando las chapas.

Preguntar al niño ¿qué sucedió en ese momento con sus chapas en la bolsa? y de manera espontánea se le pide al alumno que describa lo sucedido. Aquí dará una definición personal del concepto trabajado.

En un segundo momento: mostrarle una bolsa con chapas y en su delante extraer un número determinado y preguntarle ¿qué ha sucedido ahora?

PROCEDIMIENTOS

¿En cuál de las dos actividades presentadas se estará trabajando la adición ?



Entonces ¿Qué es la adición ? .

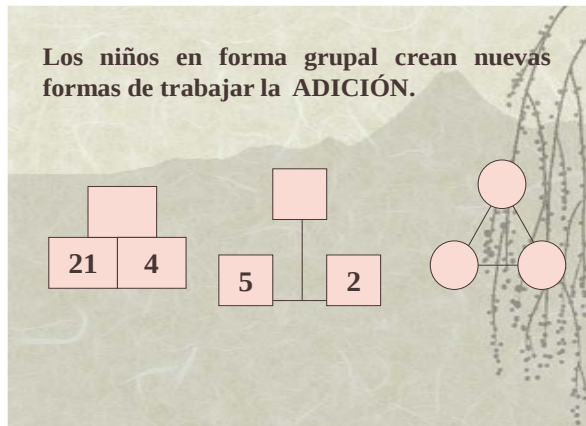
Se presentan diversas representaciones gráficas



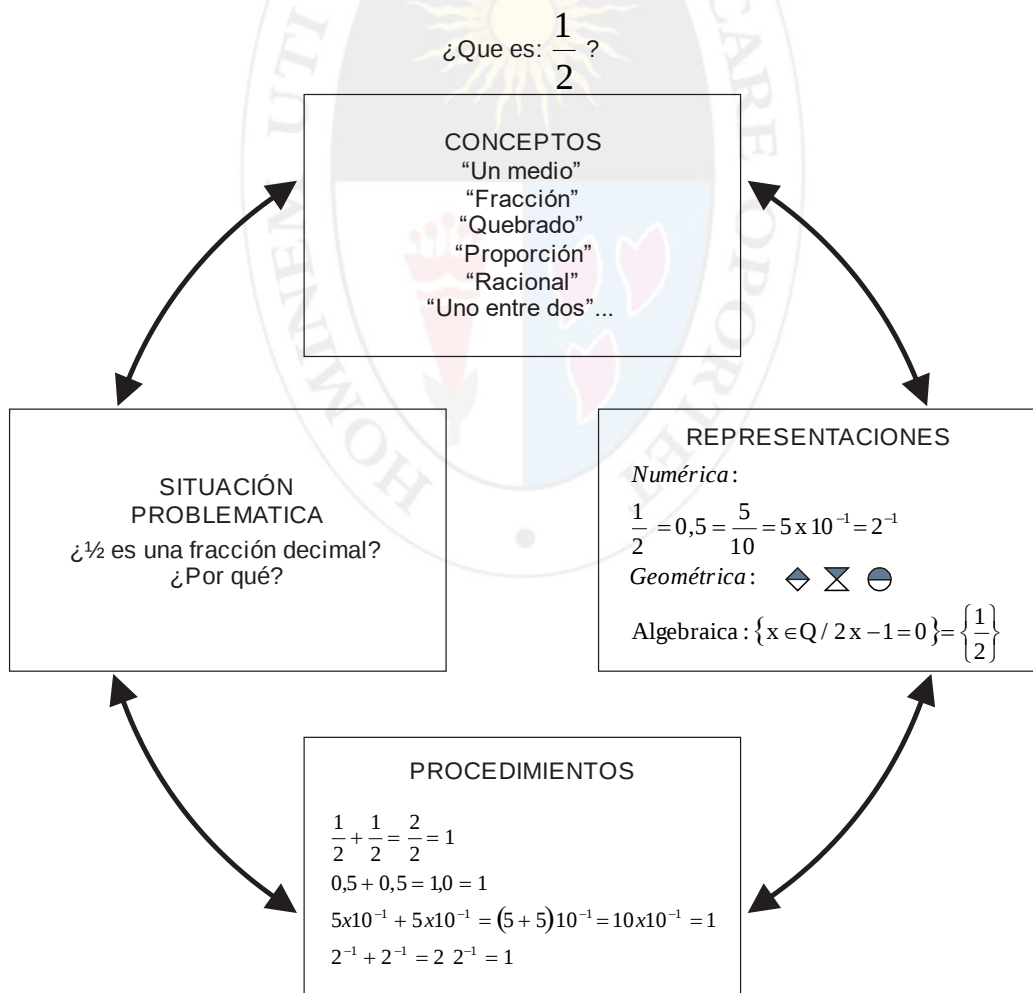
PROCEDIMIENTOS

$$1 + 3 =$$

$$\begin{array}{r} 32+ \\ 34 \end{array}$$



2.1.1. Taller de campos conceptuales



En grupo:

1. Elegir un concepto matemático, explicar su conceptualización o definición matemática y justificar por qué es importante su estudio.
2. Señalar las diferentes representaciones (aritméticas, algebraicas, geométricas, lenguaje natural, lenguaje simbólico, etc.) que usted conoce de dicho concepto, en los diferentes grados y niveles educativos.
3. Plantear una situación didáctica, problemática o un juego para el aprendizaje del concepto matemático, indicando el grado y nivel de estudios.
4. Realizar un análisis a priori de los diferentes procedimientos que se podrían utilizar en la resolución de la situación planteada, en el punto anterior.

El constructivismo:

Las investigaciones en didáctica aprovechan algunas hipótesis surgidas de investigaciones en psicogenética y psicología social:

1. Surgidos de los trabajos de Piaget, que tratan del aprendizaje, aparece la palabra **«acción»**, utilizada en el sentido de **“resolver problemas”** que pueden ser formulados en términos abstractos.
2. También de trabajos de Piaget y en relación con su teoría del equilibrio: **“los conocimientos pasan de un estado de equilibrio a otro por fases transitorias durante las cuales los conocimientos anteriores resultan limitados e insuficientes”**. Si este momento de desequilibrio es superado, es porque ha habido una reorganización de los conocimientos durante el cual los nuevos conocimientos se han integrado a los saberes anteriores. El aprendizaje no se resume entonces, en una simple memorización, o en una yuxtaposición de saberes a hacer, técnicas o un condicionamiento.
3. Gastón Bachelard ha introducido la noción de representación espontánea a propósito de fenómenos físicos, y dice “Cualquiera sea su edad, el espíritu jamás es

virgen, tabla rasa o un cirio sin impresiones” y también dice que ***“las representaciones se constituyen en obstáculos en el conocimiento científico”***.

En matemáticas, nos damos cuenta a cada instante de que **el alumno no tiene la cabeza vacía**, cada uno tiene su propia descodificación de la situación que se le ha propuesto y moviliza representaciones formadas de imágenes mentales, de técnicas de resolución, algoritmos, etc., debidos en parte a aprendizajes anteriores.

Por ejemplo, cuando un niño nos dice que entre los números 2,3 y 2,4 no hay un número decimal, podemos percibir que él tiene una concepción de número decimal: ***“dos números enteros separados por una coma”***, él aplica entonces a este par de números la propiedad que conoce para clasificar los enteros.

4. La puesta en práctica de conflictos sociocognitivos (debates) entre pares puede facilitar la adquisición de conocimientos, los trabajos de la Escuela de Ginebra de Psicología Social han mostrado el interés de los ***trabajos en grupo***.

Algunas tendencias en Psicología Cognitiva.

En el siglo XX se han desarrollado métodos modernos en las ciencias humanas gracias a ello **la educación y los procesos de aprendizaje se admiten ahora como objetos de estudio como un enfoque de tipo científico**, las teorías y prácticas pedagógicas dejadas en evidencia por los movimientos «de la escuela nueva» nacidos en los años 1920 se inspiran en los trabajos de psicólogos cognoscitivistas y sociales.

Michel Henry distingue las corrientes principales en psicología cognitiva a saber:

Las teorías que se limitan a estudiar los comportamientos observables durante procesos de aprendizaje: es el Conductismo (Behaviorismo) desarrollado por Skinner, para quién **el sujeto que aprende es una caja negra del cual no se puede conocer su funcionamiento**, conviene entonces asociar sistemáticamente las respuestas obtenidas a los estímulos que los han provocado, los trabajos en Pedagogía deben buscar buenas estrategias de enseñanza que provoquen los aprendizajes deseados.

Esta concepción desemboca en la **búsqueda de respuestas correctas a preguntas simples, tratando de evitar el error**, las primeras experiencias de enseñanza programada, que favorece el uso del computador, tenían esta concepción.

Si el aprendizaje significativo implica una modificación de los esquemas de conocimiento del alumno, tal modificación requiere que el maestro conozca el contenido de los esquemas que el alumno posee, de manera que el profesor pueda crear los desequilibrios necesarios

A este propósito dice Brousseau afirma: *“El error y el fracaso no tienen el papel simplificado que a menudo se les quiere hacer desempeñar. El error no es solo el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar, según se cree en las teorías empiristas y behavioristas del aprendizaje, sino, más bien, el efecto de un conocimiento anterior que tenía su interés y su éxito, pero que ahora se revela falso o simplemente inadaptado. Los errores de este tipo no son imprevisibles y se constituyen en obstáculos...(sic). Lo mismo en el funcionamiento del maestro que en el alumno, el error es constitutivo del sentido mismo del conocimiento adquirido.”*

Sin embargo, todo lo anterior no debe interpretarse en el sentido de que el maestro no debe actuar contra el error; no debemos considerar que una clase funciona bien cuando aparece el error con frecuencia. El maestro no debe permanecer pasivo ante el error; debe plantearse, por el contrario, una didáctica que tome en cuenta los errores de los alumnos.

Muchos errores pueden ser evitados por el maestro si este elige una progresión adecuada para aproximarse a un concepto, de forma que determinadas actividades puedan ayudar a los alumnos a revisar los errores cometidos. Parece fuera de duda que **la resolución de problemas desempeña un papel importante que ayuda al alumno en la construcción del conocimiento.**

Asimismo, antes de abordar un nuevo concepto, el maestro debería plantearse que aspectos del conocimiento desea privilegiar, que concepciones supone que posee el alumno y que saberes prácticos (procedimientos) va a desarrollar, escogiendo las situaciones de aprendizaje más coherentes para ello.

La técnica generaliza de hacer repetir ejercicios del mismo tipo al alumno que ha cometido una determinada clase de error no solo es ineficaz la mayoría de las veces, sino que, además, se corre el riesgo de fijar el error que se trata de corregir si el alumno no ha reconocido e identificado la causa de este.

Si, como hemos visto hay muchos tipos y causas de los errores, las propuestas para su tratamiento no pueden ser indiscriminadas, pero, en todo caso, es preciso dotar al alumno de las instancias de control que le permitan reconocer si sus soluciones son correctas o erróneas.

Un cambio en el contrato didáctico podría modificar las representaciones que los alumnos tienen de las matemáticas (algo que no pueden ni saben hacer), y este cambio lleva directamente a la evaluación formativa, que toma en consideración la variación del tiempo didáctico para cada alumno.

Desde el punto de vista de la organización de la clase, el trabajo en grupo favorece las interacciones de la clase, el trabajo en grupo favorece las interacciones horizontales entre los alumnos, y si el clima habitual de la clase es el admitir el error como un elemento más, es esta interacción la que advierte al alumno de su error y le ayuda a corregirlo mediante la confrontación con las concepciones de los otros. Esta dialéctica ayuda a desdramatizar y despersonalizar el error, evitándose así el frecuente sentimiento de culpabilidad al que se ven sometidos los alumnos en las clases de matemáticas.

La autoestima, siempre frágil en las relaciones que el alumno mantiene con las matemáticas, sale reforzada si el error se considera un elemento más en el proceso de aprendizaje.

En cuanto a la consecución de valores, la admisión de los errores propios y ajenos crea en el aula un clima de tolerancia y comprensión.

Una actitud tolerante ante el error lleva directamente a un trabajo conjunto de clase; puede trabajarse con rigor, pero no competitivamente, lo que desde luego contribuirá al desarrollo y apreciación de la solidaridad como valor.

*Un hombre va en un globo, se pierde y cuando está en un lugar desconocido a una altura de 5 metros del suelo ve a un hombre al que pregunta: Por favor, buen hombre, ¿dónde estoy?
El hombre piensa un rato y responde: En un globo.
Perdone, pero usted, es matemático.
Sí, ¿cómo lo sabe?
Porque le he hecho una pregunta sencilla que cualquier persona normal hubiese respondido rápidamente, pero usted se ha quedado pensándolo y al final me ha dicho algo que es indudablemente cierto, pero que ya sabía y que además no me sirve para nada.*

La actividad matemática.

Habitualmente se usa el término matemática para referirnos tanto a una “actividad” como al “resultado” de esta actividad; para un investigador matemático o al que vea las matemáticas de esta manera, la afirmación anterior parece obvia, ya que él ejerce una actividad matemática y el resultado de dicha actividad es un producto matemático, y tanto una cosa como la otra son matemática.

Sin embargo, desde el punto de vista de la enseñanza y del aprendizaje, esta diferenciación es fundamental. El alumno no está produciendo matemática, ni se espera de él resultados originales, simplemente se pretende que conozca lo que tantos y tantos matemáticos han desarrollado a lo largo de veinticinco siglos. Lo importante, bajo el punto de vista de la Didáctica, es tratar de analizar cómo debe llevarse a cabo esta actividad para que efectúe él mismo adecuadamente sus aprendizajes matemáticos en el seno de una institución escolar.

En cualquier institución escolar el trabajo de todo profesor de matemáticas supone por una parte el conocimiento del objeto del saber matemático correspondiente, y por otra parte tener una hipótesis de aprendizaje, es decir, una hipótesis de cómo llevar a cabo la enseñanza de modo que regule de forma explícita como implícita, toda sus relaciones con los alumnos (condiciones y restricciones del contrato didáctico) y la relación de los alumnos con el saber matemático puesto en juego.

Desde la Psicología diferentes investigadores aceptando que aprender significa asimilar y hacer propios los distintos hechos, principios, conceptos y procedimientos objetos

de estudio, se han preocupado fundamentalmente por dar respuestas a la cuestión de “cómo se aprende”.

¿Por qué hemos de enseñar matemática? Freudenthal (1973) justifica la enseñanza de la matemática por “la importancia de sus aplicaciones, porque es una disciplina mental de gran interés, como instrumento de entrenamiento para el pensamiento lógico, como medio de selección, *porque enseña a resolver problemas*, etc, ...” en el informe Cockroft (1987) se manifiesta que el objetivo principal de la enseñanza de las matemáticas en niveles primarios y secundarios, es “que las matemáticas proporcionan un medio de comunicación que es preciso, conciso y sin ambigüedades”.

Brousseau (1986) indica con respecto a cómo enseñar:

- Cada lección debe aspirar al máximo de adquisiciones compatibles (e incluso no compatibles en muchos casos) con las capacidades de aprendizaje del alumno.
- La enseñanza de un objeto debe hacerse bajo una forma que utilice al máximo los conocimientos anteriores y los modifique lo menos posible. Así el alumno podrá ir deduciendo lógicamente.
- Debe necesitar el mínimo de tiempo y se debe rentabilizar *por el uso ulterior bastante frecuente en las aplicaciones prácticas y en los problemas* (se ajustaría al modelo que Regine Douady (1984) llama “yo aprendo/yo aplico”).

Afirmaremos que *las situaciones-problemas* son la función primordial en el proceso de apropiación de los conocimientos matemáticos por los alumnos

En esta gestión la consideración del error de los alumnos es primordial para la estructuración de la progresión de las nociones matemáticas. La historia de la humanidad y la historia de la matemática se ha construido en muchos casos, a pesar y gracias al error. Intentar en clases una génesis del conocimiento sin error es completamente artificial y da una idea falsa de lo que es hacer matemática.

Por lo anterior, proponemos que todo docente debe utilizar una metodología de trabajo que presente situaciones-problemas respecto a una determinada noción matemática:

- Desarrollando un trabajo matemático de parte de los participantes.
- Para seguir con una puesta en común por medio de exposición de desarrollos y resultados ya sean buenos o errados.
- Con el objeto de dar origen a un análisis, en el cual se indiquen las estrategias usadas, determinando las correctas, incorrectas, las más costosas, las más económicas y
- Estudiando los nuevos conceptos que aparecen involucrados.

Para terminar una didáctica práctica, haciéndonos las siguientes preguntas:

¿A quién puedo proponer las actividades efectuadas?,

¿A estudiantes de qué nivel es posible transponer esta situación-problema?,

¿Cómo?, ¿Qué prolongaciones observamos?.

2.2. La teoría de situaciones didácticas

La situación de acción, de formulación, validación, institucionalización y evaluación

Aprendizaje y enseñanza: Teoría de Situaciones didácticas

La teoría que estamos describiendo, en su formulación global, incorpora también una visión propia del aprendizaje matemático, aunque pueden identificarse planteamientos similares sobre aspectos parciales en otras teorías. Adopta, también, una perspectiva piagetiana, en el sentido de que postula que todo conocimiento se construye por interacción constante entre el sujeto y el objeto, pero se distingue de otras teorías constructivistas por su modo de afrontar las relaciones entre el alumno y el saber.

Pero, además el punto de vista didáctico imprime otro sentido al estudio de las relaciones entre los dos subsistemas (alumno-saber), por lo que el problema principal de investigación es el estudio de las condiciones en las cuales se constituye el saber pero

con el fin de su optimización, de su control y de su reproducción en situaciones escolares. Esto obliga a conceder una importancia particular al objeto de la interacción entre los dos subsistemas, que es precisamente la situación-problema y la gestión del profesor de esta interacción.

Al respecto, y como indica Balachef (1990), se está reconociendo en los trabajos sobre Psicología de la educación matemática, la importancia crucial que presentan las relaciones entre los aspectos situacionales, el contexto y la cultura y las conductas cognitivas de los alumnos. Esta dimensión situacional, que subyace -explícitamente o no- en cualquier estudio sobre procesos de enseñanza, raramente es considerada como objeto de investigación por sí misma.

Creemos que la Teoría de situaciones didácticas, de G. Brousseau, es una iniciativa en este sentido; para que el alumno “construya” el conocimiento, es necesario que se interese personalmente por la resolución del problema planteado en la situación didáctica. En este caso se dice que se ha conseguido la devolución de la situación al alumno.

El proceso de **resolución del problema** planteado se compara a un juego de estrategia o a un proceso de toma de decisiones. Existen diferentes estrategias, pero solo algunas de ellas conducen a la solución del problema y a la construcción por el alumno del conocimiento necesario para hallar dicha solución. Este conocimiento es lo que se puede ganar, lo que está en juego (“enjeu”) en la situación. De este modo, la Teoría de Situaciones es una teoría de aprendizaje constructiva en la que el aprendizaje se produce mediante la resolución de problemas. Como teoría de resolución de problemas, asigna un papel crucial al resolutor. Comparada, por ejemplo, a la Teoría del Procesamiento de la información que asimila el proceso de resolución con el funcionamiento de un ordenador, asigna al resolutor el papel de un decididor que desea hallar la estrategia ganadora y tiene la posibilidad de modificar su estrategia inicial una vez iniciado el proceso de solución.

Debemos destacar que Guy Brousseau es uno de los didactas franceses que más ha destacado en el desarrollo de la Didáctica de la matemática en su país, y es uno de los pilares del área por lo que muchas de sus ideas han pasado al Sistema Educativo Francés. Asimismo, es reconocido internacionalmente. En Canadá la Universidad de Montreal lo ha nombrado profesor Honoris Causa, y sus trabajos son conocidos también en Estados Unidos, Alemania, Suiza, Italia y América Latina, por lo que tiene discípulos en todo el mundo.

Para este destacado investigador francés la **Didáctica de la matemática es la ciencia que tiene la misión de explicar los fenómenos didácticos**, por lo cual necesita desarrollar marcos teóricos sólidos que permitan su descripción y análisis. A esta tarea se ha abocado Brousseau desde comienzos de los años 70.

Entre sus trabajos se destacan *La teoría de situaciones* y *Los primeros fundamentos teóricos de la didáctica de la matemática*. Desarrolló esta teoría sobre la base del sistema didáctico formado por **el profesor, alumno y el saber actuando en el aula** (micro sistema).

Situación didáctica

Una **Situación didáctica** es el conjunto de relaciones establecidas explícita o implícitamente entre el alumno, un cierto medio -otros alumnos, eventualmente instrumentos u otros objetos- y un profesor, con el fin de hacer apropiar a estos alumnos un saber constituido o en vías de construcción.

De esta descripción se desprende inmediatamente que el universo de la Situación didáctica es el aula de clases. Brousseau distingue entre las situaciones: **las didácticas, las adidácticas y las no didácticas**. Las primeras tienen una intención didáctica, es decir se tiene en cuenta un conocimiento: el aprendizaje de un conocimiento.

Las situaciones adidácticas no tienen en cuenta un conocimiento sino el desarrollo de comportamientos: **modos de actuar, de decir, de explicar, de argumentar, de expresar, de escribir, de escuchar...** (responden a lo que llamamos objetivos transversales). Las no didácticas, tampoco tiene en cuenta un conocimiento y **no**

ocurren necesariamente en el aula de clases. Son conocimientos o comportamientos que se adquieren por transferencias de conocimientos o saberes escolares o por experiencias asociadas a la búsqueda personal o influida por el medio familiar o social, y debido a la peculiar característica del conocimiento matemático, que incluye, tanto conceptos como sistemas de representación simbólica y procedimientos de desarrollo y validación de nuevas ideas matemáticas. Entre las situaciones didácticas, Brousseau distingue las situaciones De acción, De formulación, De validación y De institucionalización. A su vez, estas situaciones están asociadas a formas dialécticas que tienen funciones diferentes, tales como:

Dialéctica de la acción.

En esta etapa el alumno es confrontado a una situación que le plantea un problema. En la búsqueda de la solución, el alumno realiza acciones que pueden llevar a la creación de un saber hacer. Puede explicar más o menos o validar sus acciones, pero la situación no se lo exige. Son situaciones de acción sobre el medio que favorecen el surgimiento de teorías (implícitas) que después funcionarán en la clase como modelos proto-matemáticos.

La observación de alumnos con dificultades puso en evidencia la naturaleza de las dificultades que un profesor encuentra cuando quiere obtener que el alumno actúe “por sí mismo” sobre un problema que le propone, llamamos *devolución* a esta transferencia de responsabilidad. Plantear una pregunta, transmitir a los alumnos un enunciado o una consigna, hacer entrar a los alumnos en una situación dada, son tareas que plantean a los profesores problemas de un tipo distinto de los ya considerados.

Dialéctica de la formulación.

Esta etapa está dedicada al necesario intercambio de informaciones y la creación de un lenguaje para asegurar el intercambio. El alumno podría justificar sus posiciones, pero la situación de formulación no se lo exige. Son situaciones de formulación que favorecen la adquisición de modelos y lenguajes explícitos. En estas suelen diferenciarse

las situaciones de comunicación que son las situaciones de formulación que tienen dimensiones sociales explícitas.

Por un lado el alumno debe producir personalmente lo que dice o hace como si él mismo fuera el autor, en lugar de citar o recitar. Debe pues aceptar la *responsabilidad* de resolver problemas mediante conocimientos que todavía ignora y que no se le han enseñado... lo que es formalmente contradictorio. El profesor y el alumno entra en lo que parece una negociación como un “*contrato didáctico*”, imposible de explicitar por sus contratantes, e incluso de mantener, siempre roto y siempre reconstruido, a través del cual se crea el conocimiento del alumno.

Dialéctica de la validación.

En esta etapa los intercambios no conciernen solamente a las informaciones sino a las declaraciones. Hay que probar lo que se afirma, no por acciones, sino dando razones apoyadas en los datos iniciales (hipótesis) o en las relaciones pertinentes (teoremas, propiedades,...). Las situaciones de validación, requieren de los alumnos la explicitación de pruebas y por tanto explicaciones de las teorías relacionadas y los medios que subyacen en los procesos de demostración.

Durante cierto tiempo Brousseau pensaba que los modelos de situaciones utilizados para describir las relaciones de los alumnos con las matemáticas eran suficientes para describir también la relación de los profesores con sus alumnos, pero la observación de las clases mostraba que el profesor debe intervenir para mantener ciertos equilibrios entre lo que se conoce, lo que se puede decir, lo que se muestra y lo que se ha acordado saber.

Dialéctica de la institucionalización.

Tiene por finalidad establecer y dar “status” oficial a algún conocimiento aparecido durante la actividad de la clase, y está presente en la unidad de aprendizaje y programación curricular. Un alumno puede desarrollar un conocimiento parecido a uno ya establecido en la sociedad, pero no puede saber cuál es la posición, importancia,

devenir, etc. de este conocimiento, el profesor debe reconocer e interpretar algunas acciones de los alumnos en detrimento de otras y organizar la totalidad en una historia coherente en la que los alumnos puedan distinguir lo que deben aprender o saber de lo que deben hacer para apropiarse de ese saber.

El profesor debe, por un lado, organizar la actividad de los alumnos y, por otro, “releerla” deformándola para acercar los conocimientos adaptados a las circunstancias particulares, a los saberes de la ciencia del momento.

En particular se refiere al conocimiento, las representaciones simbólicas, etc., que deben ser retenidas para el trabajo de los estudiantes y que posteriormente deberá ser evaluado, **la dialéctica de la evaluación**, ya que se institucionaliza para ser evaluado y se evalúa lo que se ha institucionalizado.

Los procesos de enseñanza se constituyen de alternancias de *devolución de situaciones autónomas* y de *institucionalización*.

Las situaciones didácticas son objetos teóricos cuya finalidad es estudiar el conjunto de condiciones y relaciones propias de un conocimiento bien determinado. Algunas de esas condiciones pueden variarse a voluntad del docente, y constituyen una **variable didáctica** cuando según los valores que toman modifican las estrategias de resolución y en consecuencia el conocimiento necesario para resolver la situación. El docente (Brousseau, 1995) “puede utilizar valores que permiten al alumno comprender y resolver la situación con sus conocimientos previos, y luego hacerle afrontar la construcción de un conocimiento nuevo fijando un nuevo valor de una variable. Las modificaciones de los valores de esas variables permiten entonces engendrar, a partir de una situación, ya sea un campo de problemas correspondientes a un mismo conocimiento, ya sea un abanico de problemas que corresponden a conocimientos diferentes.”

La capacidad que tiene cada generación de humanos para comunicar a la generación siguiente el fruto de su experiencia es tan viejo como la humanidad y tal vez sea su principal característica, de ahí que cada ser humano posee una experiencia

personal de aprendizaje y de enseñanza, y, por ello, en contraposición a la caja negra del sujeto, la enseñanza es una caja transparente tan difícil de ver.

La teoría de las situaciones no es más que uno de los intentos de ir en esta dirección, sólo se ha presentado hasta aquí la micro-didáctica: el estudio de las interacciones específicas de la difusión de un conocimiento matemático entre dos o tres sistemas, quedan muchos fenómenos por estudiar en este campo.

Lo más importante es la mejora de la enseñanza de las matemáticas, no las reformas tumultuosas o silenciosas expuestas al capricho de las prácticas, las modas o las sugerencias improvisadas a partir de otros ámbitos, sino las que se apoyan en un conocimiento más profundo y seguro de la enseñanza, y que actúan respetando una ética humanista.

Todavía más, Brousseau se ha concentrado en la enseñanza al nivel de la escolaridad obligatoria porque pedimos a nuestros niños y niñas que realicen un verdadero servicio cívico: aprender muchos conocimientos que la mayoría no utilizará personalmente, pero que deben aprender porque la sociedad necesita tener a su disposición matemáticos, del mismo modo que necesita encontrar médicos, ingenieros, panaderos y maestros. También se requiere que todos estos seres humanos puedan entenderse e intercambiar los unos con los otros para poder participar cada uno en las decisiones que les interesen, todos los niños y niñas tienen que pagar el precio de esta demanda social y nuestro deber es hacer todo lo posible para facilitar este servicio.

Cada estudiante o grupo deberá responsabilizarse por sus respuestas, justificará y argumentará utilizando los datos iniciales y afirmaciones producidas en la fase de formulación.

ANEXO A LA LEY DE MURPHY:

En términos matemáticos precisos $1+1=2$, donde el símbolo “=” significa: “rara vez”, “si acaso”.

Las matemáticas que se enseñan en el mundo son descontextualizadas y formalistas; deben reemplazarse por unas más realistas y conectadas con el entorno. Esto implica que los profesores tengan la competencia necesaria para hacer este tipo de matemáticas y luego desarrollarla en los planes de formación, indica Vincenc Font, docente español de la Universidad de Barcelona.

2.2.1. Ejemplo de una situación A - didáctica: La carrera a 20”

Se trata para cada uno de los adversarios, llegar primero a decir 20, agregando 1 ó 2 al número dicho por el otro.

El que comienza, dice 1 ó 2. Supongamos que dice 1, el otro continúa y puede agregar 1 ó 2. Supongamos que agrega 2, entonces dice 3; a su turno el primer jugador agrega 1 ó 2. Supongamos que agrega 1, entonces dice 4, etc. el primero que llega a 20 gana el juego.

Desarrollo de la clase:

(Fase de acción)

1. El profesor explica la regla del juego y comienza una partida en el pizarrón contra el alumno, luego cede su lugar a otro alumno.

Juega 1 contra 1: los alumnos juegan en grupos de 2 varias partidas. Ellos marcan en columnas los números dichos por cada jugador. Esta fase debe comprender 5 partidas, y durar a lo más 10 minutos. En esta fase los alumnos sólo aplican la regla.

El profesor pregunta: ¿Cuál es la estrategia ganadora?

Algunos se darán cuenta que responder al azar, no es una buena estrategia. Ellos encuentran restricciones del juego en el nivel de la acción y de sus propias decisiones, se dan una serie de ejemplos, algunos descubren, que el que dice 17, tiene una ventaja.

El profesor motiva la acción: ¿Qué opina tu oponente sobre tu estrategia?

¿Si aplicas esa estrategia estas seguro de que ganas la partida?

(Fase de formulación)

2. Juega un equipo contra otro (6 u 8 partidas) 15 a 20 minutos. Los estudiantes se distribuyen en equipos, en cada equipo se nombra un representante y se les da un distintivo (nombre o gorro). Cualquier alumno del equipo puede ser llamado para defender a su equipo (con el distintivo) en una partida en el pizarrón, ante todo el salón, si gana obtendrá un punto para su equipo. Los alumnos se dan cuenta rápidamente de la necesidad de concentrarse, y de discutir al interior de cada equipo para prepararse y comunicarse estrategias. Desde la primera partida, aparece como estrategia: “hay que decir 17”.

El profesor pregunta: ¿Es cierto, el que dice 17 gana?

¿Pueden mejorar la estrategia?

Juego de descubrimiento (20 a 25 min.).

El profesor pide a los alumnos enunciar proposiciones y pregunta:

¿Quién quiere decir cuál es la estrategia ganadora?

¿Qué pasos se deben seguir para ganar?

Estas son los descubrimientos que ellos han hecho y que les ha permitido ganar.

Estos descubrimientos enunciados alternativamente por el equipo A y luego el B, las escribe en el pizarrón.

DESCUBRIMIENTOS PROPUESTOS		PUNTAJE	
EQUIPO A	EQUIPO B	A	B

(Fase de validación)

El profesor pregunta: ¿Quién quiere explicar su estrategia ganadora?

¿Quién quiere justificar su estrategia ganadora?

Inmediatamente el equipo contrario verifica los descubrimientos propuestos.

En ese momento ellas son aceptadas o rechazadas. Las proposiciones aceptadas se conservan en el pizarrón.

Para cada proposición enunciada, el alumno deberá venir a probar a un adversario que ella es verdadera o falsa, ya sea jugando o bien por prueba intelectual (argumentaciones)

El profesor pregunta: ¿Qué equipo no está de acuerdo con la proposición?

Modificación de esta etapa del juego: Para dar más interés al juego, se puede adoptar la regla siguiente:

- Toda proposición enunciada que es aceptada por el curso vale un punto.
- Toda proposición probada que es falsa, da tres puntos al equipo que lo probó.
- Si el juego de descubrimiento, se estanca (o los alumnos no encuentran más proposiciones que enunciar) se agrega “¿quién dirá 20?”.

(Fase de institucionalización)

¿Qué tema o saber matemático debo abordar en esta clase? ¿Qué conceptos o proposiciones matemáticas debo de formalizar?

Dependiendo del lenguaje natural, simbólico o gráfico utilizado en el desarrollo de las fases de formulación y validación, el profesor podrá institucionalizar saberes matemáticos como los de número par, número impar, múltiplos de tres, sucesión, progresión aritmética, etc.

Desde el punto de vista didáctico se pueden abordar: Pensamiento numérico, estrategias heurísticas, razonamiento regresivo, etc.

Variables Didácticas:

- 1) Variable numérica final: “llegar primero a decir 20”, puede ser “llegar primero a decir 21”, “llegar primero a decir 25”, “llegar primero a decir 30”,...

- 2) Variable cualitativa, gana o pierde: El que dice (20, 21, 25, 30, etc.) gana el juego.
El que dice (20, 21, 25, 30, etc.) pierde el juego.
- 3) Variable numérica de inicio: “el que empieza dice 1, 2 o 3”, “el que empieza dice 1, 2, 3 o 4”. Análogamente: un jugador dice un número del 1 al 10, el otro jugador le suma un número del 1 al 10 al número que dijo el primer alumno y así sucesivamente, el que dice 100 gana.
- 4) Variable de material concreto: en una mesa hay 20 chapitas (palitos, bolitas, papeles, cartas, etc.) un jugador saca uno o dos palitos, el siguiente extrae también uno o dos palitos y así sucesivamente, gana (pierde) el que saca la última chapita (palito, bolita, papel, carta, etc.)

Los estudiantes que se apropian de la estrategia ganadora, estarán en mejores condiciones de apropiarse de la estrategia ganadora de otro juego en el que se aplique cualquiera de las variables didácticas.

El docente tiene la responsabilidad de elegir, la variable didáctica adecuada correspondiente al grado y la edad del estudiante.

Es importante considerar los siguientes aspectos en una actividad matemática:

Antes		Hora
$\left. \begin{array}{l} EXPLICAR \\ ENTREGAR \\ SANCIONAR \end{array} \right\}$	$\Rightarrow$	$\left\{ \begin{array}{l} AYUDAR \\ ORIENTAR \\ DESBLOQUEAR \end{array} \right.$

El alumno entra al juego y acepta la responsabilidad de la respuesta que da. El proceso de enseñanza aprendizaje se entiende como el juego de preguntas y respuestas. La calidad de la actividad matemática no pasa por el riesgo de depositar en el alumno toda la responsabilidad.

Método

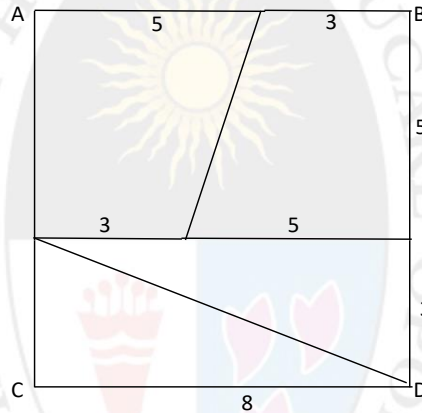
“Camino que hay que seguir para llegar a un fin”. Proviene del sustantivo griego *métodos*, compuesto por *metá* (“en medio de”, “entre”), y *bodós* (“camino”).

2.2.2. Ejemplo de una situación didáctica:

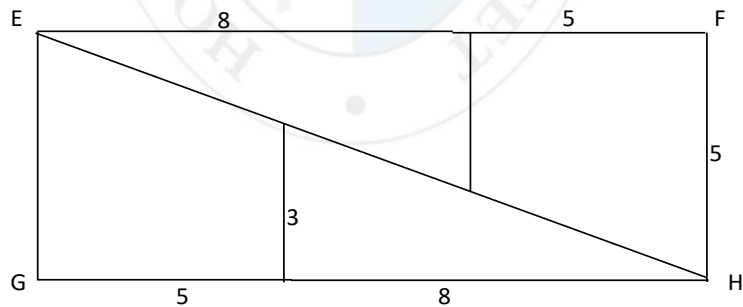
“UN CUADRADO MÁS”

Considere las medidas del cuadrado y el rectángulo siguiente:

Cuadrado:



Rectángulo:



En grupo responda las siguientes preguntas:

- 1) ¿De la descomposición del cuadrado ABCD, se obtiene el rectángulo EFGH?
Justifique su respuesta.
- 2) ¿Por qué sus áreas no son iguales?

- 3) Si repite la situación, pero con 8 y 5 (en vez de 5 y 3), ¿qué puede decir respecto a las mismas respuestas anteriores?
- 4) ¿Existirán dos números reales tales que al transformar el cuadrado en el rectángulo tengan igual área?, ¿cuáles?

“El diálogo es espíritu de buena voluntad y camaradería, no es compatible con un espíritu competitivo contencioso o agresivo”.

2.3. Teoría de Errores y Obstáculos

2.3.1. El error en el aprendizaje de la matemática, como una estrategia del constructivismo

“El alumno nunca se equivoca, solo tiene conocimientos insuficientes”.

“Toda verdad es fruto de un error rectificado”.

Un obstáculo es una concepción que ha sido en principio eficiente para resolver algún tipo de problemas pero que falla cuando se aplica a otro. Debido a su éxito previo, se resiste a ser modificado o rechazado. Viene a ser una barrera para un aprendizaje posterior y se revela por medio de los errores específicos que son constantes y resistentes. Para superar tales obstáculos, se precisan situaciones didácticas diseñadas para hacer de los alumnos conscientes de la necesidad de cambiar sus concepciones y para ayudarlos a conseguirlo.

Observe las siguientes igualdades:

$$¿ \quad 1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = i \cdot i = i^2 = -1 \quad ?$$

$$¿ \quad 2 = \sqrt{4} = \sqrt{(-2)^2} = (-2)^{\frac{2}{2}} = (-2)^1 = -2 \quad ?$$

Entonces: ¿1 = -1?; ¿2 = -2?; ¿Por qué?

$$¿a=b \Rightarrow a^2=ab \Rightarrow a^2-b^2=ab-b^2 \Rightarrow (a+b)(a-b)=b(a-b)$$

$$\Rightarrow a+b=b \Rightarrow a+a=a \Rightarrow 2a=a \Rightarrow 2=1?$$

La manera de enfocar los errores de los alumnos ha evolucionado mucho en estos últimos años, gracias a la mirada desde la didáctica en nuestra enseñanza. Generalmente, ***el error es considerado como un mal funcionamiento del saber del alumno y que un buen aprendizaje le hubiese permitido evitarlo.***

Los profesores con frecuencia se decepcionan porque se fijaron el objetivo de hacer desaparecer los errores y los alumnos la pasan mal, porque para ellos es sinónimo de fracaso. Este sentimiento se refuerza con una carga afectiva cuando se designa el error como “falta”, muchas veces sancionable y castigable. Jean Jacques Rousseau en *El Emilio*, afirma que ***“No se trata de enseñarles la verdad, sino mostrarles como hay que arreglárselas para descubrir siempre la verdad”***. En general, la actitud del profesor frente al error está estrechamente ligada a tres concepciones del aprendizaje:

En la concepción de la cabeza vacía: Un medio empleado es el aprendizaje de lecciones “de memoria”, es decir, el saber cómo estatus dogmático. La comunicación profesor-alumno reposa en el principio: “lo que se enuncia claramente será bien entendido por el oyente”, “lo que se entiende bien se enuncia claramente”, “solamente es entendible para nosotros lo que es explicable”.

Desde este punto de vista, ***el error es una señal de trabajo insuficiente del alumno que no ha sabido registrar un saber***, lo suficiente para permitirle evitar el error. El profesor advierte a los alumnos: “¡atención alumnos!, aquí hay un error que no deben cometer...”, “todos los años los alumnos siempre se equivocan en esta parte...”. El profesor explica varias veces, reexplica y si esto no es suficiente y el estudiante comete demasiados errores le hace repetir la definición, el postulado, el teorema, etc., y si no, le hacemos repetir el curso o el año y decimos: ¡este alumno necesita nuevas explicaciones y reexplicaciones!

Los límites de esta concepción:

- 1) Entre ***el sentido del mensaje*** que queremos comunicar y el sentido que el alumno le da, muchas veces hay una enorme diferencia.
- 2) Gastón Bachelard, entre otros, ha mostrado que ***la cabeza del alumno está lejos de estar vacía*** cuando aborda conocimientos nuevos a primera vista. Por ejemplo, cuando un niño nos dice que entre los números 2,3 y 2,4 no hay un número decimal, es porque ¿no tiene algún conocimiento?, si responde que entre el 3 y 4 no existe ningún número natural, ¿acaso este no es un conocimiento verdadero?

Papá, ¿me haces el problema de matemáticas?
No hijo, no estaría bien.
Bueno, pero inténtalo por lo menos.

La concepción de pequeños escalones: Se fundamenta en la idea que, para hacer pasar a un alumno de un nivel a otro de conocimientos, basta acomodarle un cierto número de etapas intermedias, lo que lleva a la ***fragmentación de un saber en microobjetivos***. Cada una de estas etapas o pequeños peldaños comporta una dificultad que el alumno debe salvar. El aprendizaje se concibe como el conjunto lineal de conocimientos y el profesor para introducir una noción al respecto prepara una ***ficha llamada de “descubrimiento”***, que contiene gran cantidad de preguntas relativamente fáciles. Por ejemplo, ***la enseñanza programada*** y las primeras experiencias de enseñanza asistida por computador pertenecen a esta concepción.

El error debe ser evitado a cualquier precio, pero si se produce, la causa no son los conocimientos de los alumnos, sino, la “progresión” propuesta: **uno de los peldaños ha quedado demasiado alto.**

Los límites de este tipo de aprendizaje son:

- 1) No porque el alumno sabe hacer la tarea intermedia, sabe hacer integralmente “la tarea”.

- 2) Si un alumno llega a cambiar las tareas intermedias, encontrará muchas dificultades para transferir sus conocimientos y ***resolver nuevos problemas, en contextos nuevos.***

En los años 60 y 70, influenciados por el conductismo, se han desarrollado trabajos que consideraban a los errores como la expresión de "algoritmos defectuosos", o de "técnicas incorrectas"¹⁰. La puesta en evidencia de estos algoritmos erróneos no conduce forzosamente a ***la comprensión de los procesos que los han creado***, lo que sería importante para un tratamiento y solución de fondo.

Los alumnos saben operar números enteros, conocen la propiedad de monotonía de la adición, las propiedades: asociativa, elemento opuesto, elemento neutro, pero, generalmente, no saben explicar ni justificar la solución de la ecuación: $x + 5 = 3$

La concepción constructivista del aprendizaje: (*"El derecho al error: sin tambores ni trompetas"*). Como consecuencia de los trabajos de Gastón Bachelard y de Jean Piaget, se ha desarrollado la concepción constructivista del aprendizaje. Para esta concepción el error juega un rol fundamentalmente diferente.

"Del derecho al error"¹¹ concedido a los alumnos se pasa progresivamente a la búsqueda de situaciones en que los errores serían reveladores de un saber en vía de constitución, necesarios al aprendizaje, los errores de los alumnos "nos interesan" en cuanto podamos sacarle provecho.

"No ayuda en nada explicar los errores en términos de falta de inteligencia o de aptitud para las matemáticas, tales concepciones obscurecen el hecho de ***que los errores son el resultado de estrategias sistemáticas de origen sensato***"¹². Maurice Bélaguer, Grenoble, 1991, concluye: "... no es posible cernir el sentido de un "error" sin conocer el contexto y el marco conceptual de la persona o del grupo involucrado".

¹⁰ Graeber, Anna y Wallace, Lisa. *Filadelfia, 1977 "for better schools: identification of systematic errors"*.

¹¹ Alain Bouvier, Lyon. 1989. *Le droit à l'erreur, dans sans tambour ni trompette*.

¹² Herbert Ginsburg. Nueva York, 1987 "Children's Arithmetic".

En didáctica de la matemática, el análisis del error reposa sobre la noción de obstáculo desarrollada por Bachelard en 1938 y sobre la teoría del equilibrio de Piaget, para Bachelard un “error” es un ***índice de otra visión de las cosas o de otra lógica***. Este concepto de obstáculo es aclarado por los trabajos de conceptualización de Gérard Vergnaud y modelado por la clasificación de los obstáculos propuestos por Guy Brousseau.

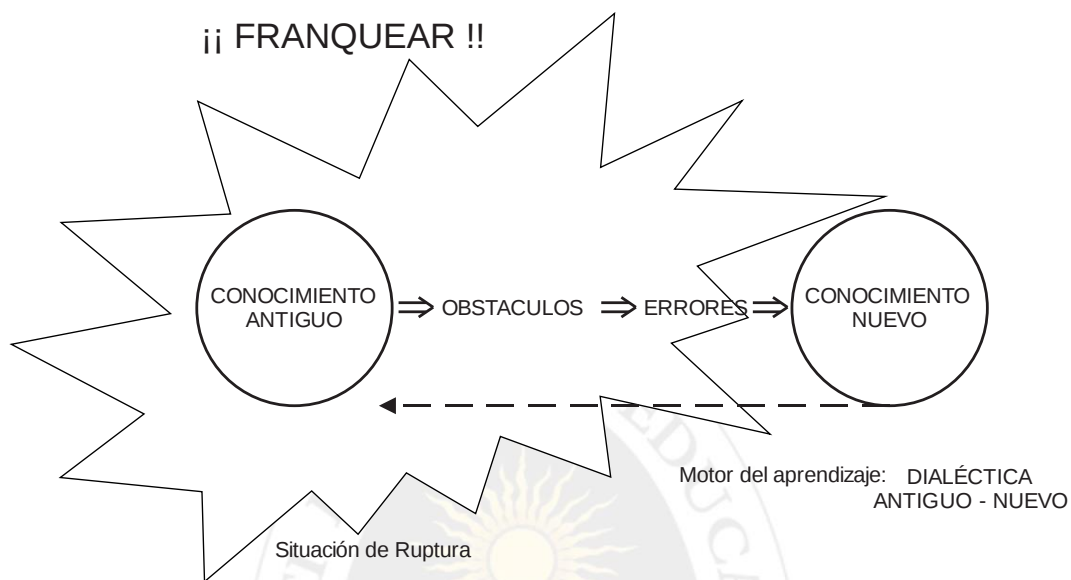
Al respecto, citemos a Bachelard: “... es en el acto mismo de conocer íntimamente que aparecen por una especie de necesidad funcional los entorpecimientos y las confusiones, ... la comprensión se adquiere contra un conocimiento anterior destruyendo conocimientos mal hechos”, y agrega: “cuando se presenta a la cultura científica, el espíritu no es nunca joven, aún más, diríamos que es muy viejo, porque tiene la edad de sus prejuicios...”¹³ por esto podemos afirmar que: “toda verdad nace de un error rectificado”.

A su vez, Guy Brousseau¹⁴ desarrolla una teoría didáctica de los errores, y escribe: “Un obstáculo se manifiesta por los errores, pero estos errores no son debidos al azar, fugaces, erráticos, ellos son reproducibles, persistentes. Además, estos errores, en un mismo sujeto, están ligados entre ellos por una fuente común: es una manera de conocer, una concepción característica, coherente si bien no es correcto, es un ***conocimiento*** antiguo que tiene éxito en todo un dominio de acciones”. Así, el error sería la expresión o la manifestación explícita de un conjunto de concepciones espontáneas o preconstruidas, integradas en una red coherente de representaciones cognitivas que se convierten en obstáculos para la adquisición y para el dominio de nuevos conceptos. ¿Qué debemos hacer? El franquear¹⁵ estos obstáculos vienen a ser entonces el proyecto del acto de enseñar, y el error resulta ser un paso obligado.

¹³ Gastón Bachelard. 1965. *La formación del espíritu científico*. Ed. J Vrin.

¹⁴ Guy Brousseau. *Les obstacles épistémologiques et les problèmes mathématiques*. RDM. Vol. 4, 1983.

¹⁵ Franquear: Libertar, abrir camino, quitar impedimentos que estorban e impiden el curso de una cosa.



2.3.2. Características y tipos de obstáculos

Un obstáculo se caracteriza, porque:

- 1) Es un conocimiento.
- 2) Produce respuestas adaptadas a ciertos problemas o clases de problemas.
- 3) Conduce a respuestas erróneas para otro tipo de problemas.
- 4) Presenta una resistencia a toda modificación o transmisión y se manifiesta de manera recurrente.
- 5) El rechazo de este conocimiento desembocará en un conocimiento nuevo.

Dentro de esta óptica se considera que el error es necesario para que el alumno ponga en marcha sus procesos cognitivos, y para que el profesor conozca las concepciones del alumno, y eventualmente reconozca los obstáculos subyacentes y adapte la situación didáctica. Luego, el **Contrato didáctico** debe no solamente aceptar “el derecho al error” sino solicitarlo para explorarlo.

Tipos de obstáculos

1) Obstáculos epistemológicos

Son obstáculos inherentes al saber mismo. La complejidad de los conceptos, y de sus relaciones en los campos conceptuales (que los alumnos dominan poco), chocan con las concepciones espontáneas que tienden a oponer conocimientos empíricos con el saber sabio (puro). Se reconocen por las dificultades encontradas por los matemáticos mismos y han sido superadas durante la historia. La comprensión de estos obstáculos se nutre de las investigaciones en epistemología e historia de las matemáticas.

Ejemplos:

El estatus de los números

- “Dios ha creado los números enteros, los otros son obra de los hombres”, declaraba Kronecker a fines del siglo XIX. Luego se diría: “Dios creó el número cero el resto es obra de Peano”. La relación entre dos cantidades no se percibe fácilmente como un número.
- Los pitagóricos rechazaban la irracionalidad de la raíz cuadrada de 2.
- Los números negativos eran calificados como “números absurdos”.
- Los números complejos (“imaginarios”) han sido utilizados como herramienta de cálculo algebraico durante más de 300 años antes que Cauchy y Gauss le dieran el estatus de números.

El cero

- Apareció en las Indias para llenar lagunas en una numeración de posición. Hubo que esperar hasta el siglo IX para descubrirlo en los tratados árabes, y el siglo XII para ver aparecer sus propiedades algebraicas.

- Identificar el cero con la «nada», desplaza este obstáculo epistemológico hacia un aspecto psicológico ¿cómo la nada puede significar algo y escribirse de algún modo? ¿ $\{\} = \emptyset$?

El infinito

- Fuente de grandes dificultades de fundamentos, las paradojas de Zenón de Elea, más tarde las de Cantor y Russell.
- Es siempre verdadera la afirmación: “El todo es mayor que cualquiera de sus partes”
- ¿Hay la misma cantidad de números naturales que números enteros?, ¿existe la misma cantidad de números naturales que números racionales?, ¿y entre números racionales e irracionales?, ¿dónde hay más números, en la recta real o en el intervalo $[0,1]$?

El concepto de función

- Han pasado 2000 años para consolidar la generalidad con que goza hoy. Su historia está muy ligada a la noción de límite.
- Cauchy señalaba que para Euler: $\sqrt{x^2}$ era reconocida como una función porque estaba definida por una sola fórmula, mientras que:

$$x \rightarrow \sqrt{x} \quad ; \text{ si } x \geq 0$$

$$x \rightarrow \sqrt{-x} \quad ; \text{ si } x < 0; \text{ no lo era.}$$

- ¿Cuáles de las siguientes expresiones, representa a una función?

$$f(x); f; y; 2x+1; f(x)=2x+1.$$

2) Obstáculos didácticos

Son los obstáculos creados por la decisión de adoptar tal o cual estrategia de enseñanza. Los obstáculos didácticos son inevitables, pues son inherentes a la

necesidad de la transposición didáctica. No se pueden suprimir las etapas, las aproximaciones, las analogías más o menos pertinentes durante el aprendizaje. Las investigaciones en didáctica tienen precisamente la misión de presentar a los profesores los obstáculos didácticos que ellos han podido poner en evidencia.

Ejemplos:

Los decimales

- El aprendizaje a partir de la medida de longitudes (o superficie) con una unidad o subunidades, conduce a la concepción del decimal como un par de números enteros separados por una coma, por lo que se cometen muchos errores como:

“ $3,7 + 3,8 = 5,15$ ” o también: “el sucesor de 3,7 es 3,8”.

Las fracciones

- El descubrimiento de las fracciones por la partición de una torta deja la idea de que una fracción es siempre una parte de la unidad.
- El estudio de la división de enteros, conduce a rechazar la propiedad.

El cuadrado

- Que un cuadrado no sea un rectángulo en la escuela básica, es fuente de dificultades posteriores, ¿Qué es un cuadrado?

Números negativos

- La introducción de los números negativos tratando de ubicar sobre un eje temperaturas u otras medidas, sirve bien para aprender la adición, pero constituye un obstáculo para el uso correcto de la regla de los signos.

$$(-3) + 2 = -1$$

Explique usted ¿por qué?

$$(-3) - (-2) = -1$$

¿Por qué?

Muchos obstáculos didácticos son creados por el uso abusivo de las analogías.

3) Obstáculos psicológicos

Son obstáculos que se presentan cuando el aprendizaje viene en contradicción con representaciones profundamente ancladas en el sujeto o cuando lo induce una desestabilización que su mente no acepta. Muchos factores pueden dar origen a estos obstáculos y aún ser exteriores a la relación didáctica, lo que no quiere decir que el profesor no debe interesarse por ellos.

Ejemplos:

Lógica matemática

- La lógica matemática no es la lógica de la vida corriente: “Si haces tu tarea, entonces, tendrás un chocolate”.
- Un alumno con conocimientos de lógica, comprende que, si no hace su tarea, no peligra su chocolate, ya que la implicación: $F \Rightarrow V$; es Verdadera.
- ¿Por qué el conjunto vacío está contenido en cualquier conjunto?

El cero

- Es fuente de obstáculos psicológicos por temor a la nada y por el hecho de que está mal visto dividir por cero.
- Cuando el exponente es cero, ¿Por qué $x^0 = 1$?

Condiciones psicológicas

- El alumno siente un nudo en el estómago cuando tiene que realizar cálculos con potencias porque nunca ha comprendido nada y, además, se acuerda que el profesor se burló de él cuando explicó por primera vez esas potencias.
- Un alumno afirma: “yo soy nulo para las matemáticas, por más que me explican no entiendo”.

- Se cita el caso de un alumno que tenía problemas con el número 2, no podía utilizarlo. El análisis del hecho reveló que él no aceptaba a su hermano gemelo.

4) Obstáculos ontogenéticos¹⁶

Son obstáculos que quedan al descubierto cuando el aprendizaje requiere salvar algunas exigencias y la madurez del sujeto no le permite responder a ellas. Cualquiera sea la explicación, el alumno no reconoce lo que se le pide y el desarrollo de su pensamiento queda al margen del tema conceptual al que se le quiere introducir.

Ejemplos:

Piaget

- La teoría de los estadios de Piaget indica la imposibilidad de desarrollar un cálculo formal en el estadio de las operaciones concretas.

Lenguaje matemático

- El uso correcto del lenguaje y los símbolos matemáticos enfrenta este tipo de obstáculos. Se pueden desarrollar aprendizajes algorítmicos, acostumbrar a los alumnos a repetir correctamente los términos usados por el profesor, pero se pierde el sentido de la actividad matemática para los alumnos y de ahí posteriormente se desprenderán muchos errores, por ejemplo:

a) *Leer* : -2^3 y $(-2)^3$ b) *Leer* : $2x+5$ y $2(x+5)$

¿Cuál es la diferencia en lenguaje natural y cuáles son los conceptos matemáticos involucrados, en cada una de las afirmaciones?

- En una cita, Gauss decía, en relación al lenguaje matemático: "... la ciencia ha ganado así, en riqueza, belleza y una solidez infinita, pero en el uso

¹⁶ Conjunto de los fenómenos de desarrollo y diferenciación del individuo a partir del período embrionario.

cotidiano de esta herramienta, la ciencia ha perdido tanto como lo que ha ganado, ..., cada usuario sea consciente de las condiciones originales, ...”.

- El estudio de los fundamentos de la matemática comprende el estudio de la lógica y conjuntos, por esta razón se estudia lógica y conjuntos en el primer ciclo universitario, de lo contrario, muchos docentes opinan que estudiar matemática sería como “tocar piano sin los dedos”.

5) Obstáculos culturales

Cuando los conocimientos introducidos se insertan en una red de conceptos que toman sentido en una cultura dada pero no en la cultura de un alumno en particular. Por ejemplo, ¿utiliza usted la coma decimal?, observamos cómo algunos diarios siguen utilizando la coma para indicar los miles y las calculadoras y las PC continúan usando el punto decimal.

En Chile, la expresión $3/2$ se lee: “tres partidos por dos”, cuando se refieren a mil quinientos pesos algunos dicen: “mil cinco pesos”.

“Una ordenada presentación lógica de la matemática puede tener un atractivo estético para el matemático, pero sirve de anestésico para el estudiante”.

Morris Kline

6) Obstáculos técnicos

Cuando la complejidad de la tarea sobrepasa las capacidades de atención del alumno. Por ejemplo, pedirle al alumno de Educación Básica multiplicar números grandes en cifras romanas.

Los errores pueden conducirnos a descubrimientos apasionantes si ellos son significativos. Cuando se dan, la expresión de estos errores, deja al descubierto que el alumno no lo ha escrito al azar, pues su producción ha sido guiada por un proceso escondido. Sin embargo, el análisis de estos errores demanda gran cuidado, mucha atención y una gran cultura histórica, epistemológica y didáctica. Actualmente, el análisis de los errores, es una tarea de los didactas aunque los profesores, al menos,

deben diagnosticarlos y buscar informaciones, preguntarse qué han dicho o dicen los especialistas, etc., porque deben ser conscientes de que su acción pedagógica tendrá repercusiones sobre el aprendizaje de sus alumnos. Por ética profesional, no deben ignorarlos.

Cuando un obstáculo se ha detectado es necesario aprovechar la ocasión para poner al alumno frente a una situación que le permita sobrepasarlo en forma permanente. El tiempo así ganado para el aprendizaje puede ser muy importante. Los profesores tienen varias decisiones pedagógicas a su disposición para la gestión de los errores, pero la peor decisión es ignorarlos.

Por ejemplo, la suma de $-9/3$ más $4/2$ se realizaría de la siguiente manera:

$$\frac{(-9)}{3} + \frac{4}{2} = \frac{(-9)+4}{3+2} = \frac{-5}{5} = -1 \quad \text{¿Este resultado es incorrecto?}$$

Sumemos utilizando las dos técnicas (de manera «correcta» y de manera «incorrecta») las siguientes fracciones:

$$\frac{(-18)}{3} + \frac{8}{2} = \qquad \frac{(-12)}{2} + \frac{3}{1} =$$

Veamos qué se puede determinar y en qué casos:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} \Rightarrow \frac{ad+bc}{bd} = \frac{a+c}{b+d}$$

$$\Rightarrow (ad+bc)(b+d) = (a+c)(bd) \quad adb + ad^2 + b^2c + bdc = adb + dbc$$

$$\Rightarrow adb + ad^2 + b^2c + bdc = adb + dbc$$

$$\Rightarrow ad^2 = -b^2c \Rightarrow a = \frac{-b^2c}{d^2}$$

Con esta expresión, podemos determinar algunas soluciones enteras.

Análogamente, justifique el procedimiento de las siguientes restas:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{(3)(4)} = \frac{1}{12} \quad \text{y} \quad \frac{1}{7} - \frac{1}{8} = \frac{1}{(7)(8)} = \frac{1}{56}$$

Verifique usted que:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{(a)(b)} \Leftrightarrow b = a + 1$$

¿Es posible simplificar b en la expresión: $\frac{ab}{bc} = \frac{a}{c}$; con b diferente de cero?

¿Cómo explica que sí se cumple en los siguientes ejemplos?:

$$\frac{16}{64} = \frac{1}{4} ; \quad \frac{26}{65} = \frac{2}{5} ; \quad \frac{19}{95} = \frac{1}{5} ; \quad \frac{49}{98} = \frac{4}{8}$$

¿Y si simplificamos el cero en: $\frac{102}{204} = \frac{12}{24}$ y $\frac{103}{206} = \frac{13}{26}$?

¿La igualdad no se cumple?

¿La siguiente igualdad: $\sqrt{a \frac{b}{c}} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{\frac{b}{c}}$ es verdadera?

En las siguientes igualdades: $\sqrt{4 \frac{4}{3}} = \sqrt{4} \sqrt{\frac{4}{3}} = 2 \sqrt{\frac{4}{3}}$

$$\sqrt{4 \frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{16}{3}} = 2 \sqrt{\frac{4}{3}}$$

¿Puede usted describir el error?

Esto significa confundir: $\sqrt{a \frac{b}{c}} = \sqrt{a \times \frac{b}{c}}$?

Lo que en realidad es confundir: $\sqrt{a + \frac{b}{c}} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{\frac{b}{c}}$; si $a = r^2$ y $s = \frac{a}{b}$;

La igualdad anterior se puede escribir como: $\sqrt{r^2 + s} = r\sqrt{s}$

Donde: $s = \frac{r^2}{r^2 - 1}$; con $r > 1$; algunas soluciones son:

$$\sqrt{9\frac{9}{8}} = \sqrt{9}\sqrt{\frac{9}{8}} = 3\sqrt{\frac{9}{8}}; \quad \sqrt{16\frac{16}{15}} = \sqrt{16}\sqrt{\frac{16}{15}} = 4\sqrt{\frac{16}{15}}.$$

El aspecto de “concepción limitada”, que se da a los errores detectados en la historia de la matemática, puede ser válido también en el caso de los errores cometidos por los estudiantes, puesto que muchos de sus yerros pueden explicarse a través de los métodos que los propios estudiantes desarrollan con el tiempo, siendo válidos de manera parcial. Es decir, los estudiantes proceden de maneras equivocadas porque algunos procedimientos son válidos para ellos dentro de sus propios esquemas. Modificando la letra de una conocida canción Argentina, se puede decir: *«Error es un placer... error errando espero al acierto que yo quiero...»*.

2.3.3 Taller: “Errores y obstáculos”

Por favor, lea con detenimiento antes de contestar e indique la verdad (V) o falsedad (F) de las siguientes afirmaciones:

- 1) En una potencia, el exponente número natural n , indica el número de veces que se repite la base como factor. ()
- 2) Si A es el conjunto de los meses del año 2011 y B es el conjunto de los meses del año 2012, entonces el conjunto formado por A y B tiene 24 elementos. ()
- 3) Para todo número natural x , existe 0 en $\mathbb{N}$, tal que: $x + 0 = 0 + x = x$. ()
- 4) El conjunto solución de la inecuación: $x - 2 < 4$ es $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ en $\mathbb{N}$. ()
- 5) En una fracción el denominador indica el número de partes en que se ha dividido la unidad y el numerador indica el número de partes en que se toman. ()
- 6) Un conjunto es finito si podemos contar sus elementos. ()
- 7) Un conjunto es infinito si no podemos terminar de contar sus elementos. ()
- 8) Hay más números naturales que números pares, exactamente el doble. ()
- 9) Con toda seguridad, el número que sigue en la serie 1, 2, 3, 4, 5, ... es 6. ()
- 10) $0,99999999... < 1$. ()

Elija una de las respuestas que ha considerado verdadera y justifíquela:

La afirmación N° es verdadera porque:

.....

.....

.....

.....

.....

“La creación ha sido descrita algunas veces con el siguiente proceso: Las matemáticas dicen A, escriben B, quieren decir C, pero lo que significan es D, y de hecho D es una idea espléndida que emerge al poner orden en la confusión”.

Número: Significa “cantidad”. Proviene del sustantivo latino *numerus*, que originariamente significó “rango”, “categoría” y luego “cantidad”.

Referencias Bibliográficas

Artigue, M. (2000). “Didáctica de la Matemática y formación de profesores”. Conferencia pronunciada en la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile.

Bachelard, G. (1948). “La Formación del Espíritu Científico”. Editorial Siglo XXI. México D.F.

Brousseau, G. (1988). “Los diferentes roles del maestro”. Capítulo IV de la compilación realizada por Parra, C. y Saiz, I. (1997) en “Didáctica de las Matemáticas, aportes y reflexiones”. Paidós Educador. Buenos Aires. Argentina.

Brousseau, G. (1993.) "Problemas de Didáctica de los Decimales". Trabajos de Matemática. Págs. 37 -188. [Traducción realizada con autorización del autor por: Dilma Fregona y Facundo Ortega] Córdoba. Universidad Nacional de Córdoba. Colombia.

Brousseau, G. (1998). “Théorie des situations didactiques”. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y., et al. (1997) “Estudiar Matemáticas: El eslabón Perdido entre la enseñanza aprendizaje”. Editorial Horsori. Barcelona. España.

Chevallard, Yves. (1991) “La Transposición Didáctica: Del saber sabio al saber enseñado”. Editorial Aique. Buenos Aires. Argentina.

Duval, R. (1993). “Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée.”(pp 37 a 65). Annales de Didactiques et Sciences Cognitives. IREM de Strasbourg. Francia.

Duval, R. (1999). “Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales”. Universidad del Valle. Colombia.

Freire, P. (1999). “Pedagogía del Oprimido” Editorial Siglo Veintiuno. México, D.F:

Glaeser, G. (1982). “Didatique des Mathématiques Experimental”. Estrasburgo.

Guzmán I. (1990). “Le role des representations dans l’appropriation de la notion de fonction”. Tesis de Doctorado. Universidad Louis Pasteur. Francia.

Guzmán I. (1998). Apuntes de clase del curso “Didáctica Experimental de la Matemática”. Magister en Enseñanza de las ciencias con mención en didáctica de la Matemática. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile.

Guzmán I. (1999). Apuntes de clase del curso “Fundamentos Teóricos de la Didáctica de la Matemática”. Magister en Enseñanza de las ciencias con mención en didáctica de la Matemática. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile.

Perero, M. (1994). “Historia e Historias de Matemáticas”. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Piaget, J. et al. (1997) “Epistemología de la Matemática”. Editorial Paidós. Buenos Aires.

Polya, G. (1984) “Cómo Plantear y Resolver Problemas”. Editorial Trillas. México.

Vergnaud, G. (1990) “La teoría de los campos conceptuales”, en Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 10, n° 2, 3, pp. 133-170. Francia.

Vygotsky, L. (1980). “Pensamiento y Lenguaje”. Editorial Lautaro. Buenos Aires, Argentina.